Müller,Gerhard N.; Steinbring, Heinz; Wittmann,Erich Chr. (Hrsg.):

## Arithmetik als Prozess.

Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, 2004.
- 408 S.
(Reihe: Elementarmathematik als Prozess)
ISBN: 3-7800-2051-3

Friedhelm Padberg, Bielefeld (Germany)

**Abstract:** „Arithmetic as a process“ edited by G. Müller, H. Steinbring and E. Wittmann, is the first volume to be published in a series entitled „Elementarmathematik als Prozess (Elementary mathematics as a process). The first and third chapters contain sections on number theory, combinatorics, continued fractions, sequence of numbers, complete induction, and modeling the environment with numbers. The two chapters differ in that the former focuses on arithmetic activities whereas the latter deals with theory formulation. Two further chapters address the history of arithmetic and the foundations of natural numbers. The goal of this book is to show college students how to gather first experiences with these topics through arithmetical activities before going on to classify their active experiences systematically to parts of arithmetic theories or to parts of the history of arithmetic. This should make it possible for them to move beyond learning the subject passively and to organize and experience arithmetic as a process.

**Kurzreferat:** Der von G. Müller, H. Steinbring und E. Wittmann herausgegebene Band „Arithmetik als Prozess“ ist als erster Band einer Reihe mit dem Titel „Elementarmathematik als Prozess“ erschienen. Der Band enthält einerseits in zwei verschiedenen Kapiteln jeweils Abschnitte zu den Themen Zahlentheorie, Kombinatorik, Kettenbrüche, Zahlenfolgen und vollständige Induktion sowie Modellbildung, er enthält ferner zwei weitere Kapitel zur Geschichte der Arithmetik sowie zur Begründung der natürlichen Zahlen. Ziel dieses Bandes ist es, durch arithmetische Aktivitäten erste Erfahrungen zu obigen Themen sammeln zu lassen und erst anschließend auf dieser Grundlage diese aktiven Erfahrungen zu Ausschnitten arithmetischer Theorien bzw. zu Ausschnitten der Geschichte der Arithmetik systematisch zu ordnen. So soll die Arithmetik nicht rein rezeptiv vermittelt, sondern als Prozess organisiert und erfahren werden.

**ZDM-Classification:** B50, E40, E50, F10, K20

Nach längerer Ankündigungszeit ist kürzlich der *erste* Band einer von Gerhard Müller, Heinz Steinbring und Erich Wittmann geplanten neuen Reihe mit dem Titel „Elementarmathematik als Prozess“ erschienen. Die lange Entstehungsgeschichte dieses ersten Bandes „Arithmetik als Prozess“ hängt sicher mit der umfangreichen Gruppe von insgesamt 15 Autoren zusammen. Im Einzelnen enthält dieser Band Beiträge von Peter Bender, Peter Damerow, Lisa Hefendehl-Hebeker, Gerhard Müller, Petra Scherer, Siegbert Schmidt, Berthold Schuppar, Christoph Selter, Hartmut Spiegel, Heinz Steinbring, Anna Susanne Steinweg, Gerd Walther, Heinrich Winter, Erich Wittmann und Jochen Ziegenbalg. Hierbei bearbeiten im Idealfall jeweils zwei Autoren gemeinsam zwei miteinander eng zusammenhängende Abschnitte, wobei allerdings schon das Inhaltsverzeichnis Abweichungen hiervon zu erkennen gibt: So werden immerhin 6 Abschnitte im Haupttext (ohne Anhang) jeweils nur von *einem* Autor verantwortet. Die Vielzahl der Autoren erleichtert allerdings nicht gerade die Rezension dieses immerhin 408 (!) Seiten umfassenden, fast im DIN A4-Format gedruckten Bandes, zumal die einzelnen Abschnitte „unterschiedliche persönliche Stile repräsentieren“ (S. 18).

### 1. Zielgruppe

Die Zielgruppe für diesen Band wird von den Herausgebern folgendermaßen beschrieben:

> „Die Arithmetik ist ein klassisches Gebiet der Mathematik, das im Grund- und Hauptstudium von Lehramtsstudiengängen eine prominente Rolle spielt und in den Curricula von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe II breiten Raum einnimmt. Aufgrund unserer Erfahrungen in der Lehreraus- und -fortbildung glauben wir, dass sich das Buch als Referenztext für aktiv-entdeckendes Lernen im Studium und in der schulischen Praxis eignet. Auch Kenner der Arithmetik dürfte es reizen, dieses Gebiet einmal von einer anderen Seite zu betrachten“ (S. 16).

In der *Lehrerfortbildung* werden diesem *fachlich* orientierten Buch gute Chancen eingeräumt; denn: „Auch erfahrene Lehrerinnen und Lehrer reizt es, ihr Fachwissen unter einem neuen Aspekt aufzufrischen und anzureichern“ (S. 10).

Die potenzielle Zielgruppe für diesen Band wird also von den Herausgebern sehr breit – nach meiner Einschätzung zu breit – gesehen, nämlich – auf den Punkt gebracht – sämtliche angehende und praktizierende Lehrkräfte von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe II, ferner auch Kolleginnen und Kollegen aus dem Universitätsbereich.

### 2. Zielsetzung

Um eine Neuorientierung des *Unterrichts* zu erreichen (Stichworte z. B.: Lernende als *Akteure* ihres Lernprozesses; Entwicklungs*prozesse* zählen mehr als nur die fertigen Wissensstrukturen; *Produktion von Lösungswegen* ist wichtiger als die Reproduktion von Rezepten), ist nach Ansicht der Herausgeber eine entsprechende Neuorientierung der *Lehrerausbildung* notwendig, denn „Lehrerinnen und Lehrer können ihren Unterricht umso erfolgreicher umstellen und weiterentwickeln je produktivere Erfahrungen zum Lernen und Lehren von Mathematik sie bei ihren eigenen fachlichen Lernprozessen während ihrer Ausbildung erworben haben“ (S. 11/12). Konkret auf diesen Band bezogen soll daher Arithmetik

> „als Prozess erfahren und unterrichtsrelevantes Fachwissen im Prozess erworben werden. Im Mittelpunkt des Buches steht daher die Auseinandersetzung mit problemhaltigen

arithmetischen Situationen: Eine solche Situation muss zuerst in der Sprache der Arithmetik erfasst werden („Mathematisieren“). Dann kann man versuchen, Muster zu entdecken („Explorieren“) und diese soweit wie möglich zu begründen („Argumentieren“). Schließlich müssen die gewonnenen Einsichten möglichst verständlich aufgeschrieben werden („Formulieren“)“ (S. 12).

Den richtigen Weg zum „gründlichen Erlernen eines Stoffgebietes“ (sic!, S. 13) wie der Arithmetik sehen die Herausgeber (und auch die Autoren) in einer *zweigestuften* Vorgehensweise: *Zunächst* werden die gerade erwähnten problemhaltigen arithmetischen Situationen den Studierenden in Form gut strukturierter Sequenzen angeboten, „an denen sie ausgiebige Erfahrungen mit mathematischen Prozessen sammeln können, insbesondere auch Erfahrungen mit scheinbar erfolglosen Anläufen sowie mit der konstruktiven Aufarbeitung von Mängeln und Fehlern“ (S. 13). Eine *zweite Stufe* (oder Ebene) bildet die anschließende *systematische* Ordnung des mathematischen Stoffgebietes, die auf den vorhergehenden Erfahrungen der ersten Stufe aufbaut. Diese anschließende Systematisierung ist wichtig und darf keinesfalls fehlen; denn „die Systematisierung ist ein Wesensmerkmal der Mathematik, das ebenso wichtig ist“ (S. 13).

Neben dieser zweigestuften Vorgehensweise – die sehr zu begrüßen ist – bildet nach Meinung der Herausgeber aber auch die *Auswahl der Inhalte* bei mathematischen Lehrveranstaltungen ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal zu vielen konventionellen Lehrveranstaltungen im Universitätsbetrieb. Die mathematischen Inhalte sollten nämlich nach Möglichkeit Bezüge zum *Schulcurriculum* aufweisen und als mathematisches Hintergrundwissen eine wichtige Funktion für die Lehramtsstudierenden haben – eine Position, mit der ich völlig übereinstimme. Gerade im Bereich der Arithmetik ist eine derartige Auswahl naheliegend und gut realisierbar. Diese Auswahl der Inhalte bedeutet mathematische Lehrveranstaltungen *speziell* für Lehrerstudenten; denn „wie die Erfahrungen zeigen, vermittelt eine Lehrerausbildung, die sich an der Ausbildung für mathematische Spezialisten orientiert, nicht den wissenschaftlichen Hintergrund für den Mathematikunterricht an allgemein bildenden Schulen“ (S. 12).

### 3. Globaler Aufbau dieses Bandes

Das vorliegende Buch umfasst neben einem kurzen Vorwort (2 Seiten) und einer Einleitung zum Thema „Elementarmathematik als Prozess“ (8 Seiten) folgende vier Kapitel:

1. Erfahrungen sammeln: Arithmetische Aktivitäten (112 Seiten)

2. Arithmetik im historischen Prozess: Wie „natürlich“ sind die „natürlichen Zahlen“? (52 Seiten)

3. Erfahrungen ordnen: Ausschnitte arithmetischer Theorien (177 Seiten)

4. Begründung der Arithmetik: Rechengesetze und Zahlbegriff. (37 Seiten)

Im *ersten* Kapitel sollen durch arithmetische Aktivitäten eigene Erfahrungen der Studierenden zu mathematischen Lernprozessen angestoßen werden. Die Überschriften der sieben Abschnitte dieses Kapitels sind appetitanregend: Mit Zahlen spielen (1.1), sich Zahl um Zahl hochhangeln (1.2), Zahlen geschickt addieren (1.3), Zahlen mit Zahlen ausmessen (1.4), Zählen ohne zu zählen (1.5), mit Brüchen spielen (1.6), die Umwelt mit Zahlen erfassen: Modellbildung (1.7). In jedem Abschnitt werden zehn *Aufgabenstellungen* zur Bearbeitung angegeben, die vom Umfang her von nur wenigen Zeilen bis hin zu mehrseitigen Fragestellungen und Erklärungen reichen. Hierbei gibt es Abschnitte, die fast ausschließlich aus diesen Aufgaben bestehen mit ggf. einigen eingeschlossenen vorbereitenden Informationen (dies ist so überwiegend der Fall) und daneben aber auch andere Abschnitte, wo nach viel vorbereitendem Text die Aufgaben selbst nur relativ wenig Raum einnehmen. Hierbei wird in den einzelnen Abschnitten - allerdings unterschiedlich gut - der mathematische Hintergrund zu den vorgestellten Aufgabenstellungen jeweils so weit entwickelt, wie es zum Verständnis notwendig ist.

„Direkte Lösungshinweise werden nur im Ausnahmefall gegeben. Es werden aber Werkzeuge eingeführt, die Sie [als Leser, F. P.] zur Lösung heranziehen können, und z. T. wird die Handhabung dieser Werkzeuge an verwandten Problemen illustriert. Eine Schlüsselrolle spielen dabei bestimmte nichtformale Darstellungen mathematischer Objekte [wie z. B. der Zahlenstrahl, Punktmuster, Tabellen, Diagramme; F. P.]“ (S. 15).

Mit Hilfe dieser nichtformalen Darstellungen werden auch *nichtformale* Beweise durchgeführt.

Das *zweite* Kapitel ist untergliedert in die Abschnitte: Psychologie und Geschichte des Zahlbegriffs – wie passen diese zusammen? (2.1); Alte Dokumente deuten, um dem Ursprung des Zählens und Rechnens nachzuspüren (2.2) sowie Das Rätsel der Zahlen: ewig und doch historisch geworden! (2.3). Die drei Zwischenüberschriften geben schon einen guten ersten Überblick über dieses Kapitel. Zu den Abschnitten 2.2 und 2.3 gibt es jeweils zehn Aufgaben, der einleitende Abschnitt 2.1 ist nur sehr kurz und umfasst keine Aufgaben.

Das *dritte* Kapitel ist entsprechend dem ersten Kapitel untergliedert in die sieben Abschnitte: Stellenwertsysteme (3.1), Zahlenfolgen und vollständige Induktion (3.2), Summenformeln (3.3), Elemente der Zahlentheorie (3.4), Elemente der Kombinatorik (3.5), Elementare Theorie der Kettenbrüche (3.6), Theoretische Vertiefung von Modellen (3.7). Die arithmetischen Aktivitäten des ersten Kapitels werden hier erneut aufgegriffen und in eine systematische Form gebracht. Die Herausgeber verfolgen hiermit genauer folgende Zielsetzung:

„Dieses Kapitel soll Sie [als Leser, F. P.] anregen, Ihre bei der Bearbeitung von Kapitel 1 gewonnenen Erfahrungen zu ordnen. Sie erhalten dabei eine kompakte Übersicht über schulrelevante arithmetische Theorien. Jeder Abschnitt endet mit zehn Aufgaben, an denen Sie Ihr Verständnis des jeweiligen Themas testen und vertiefen können" (S. 15/16).

Ein Vergleich der *Aufgaben* in diesem dritten Kapitel mit den Aufgaben in den korrespondierenden Abschnitten des ersten Kapitels zeigt *deutliche* Unterschiede auf: Im dritten Kapitel wird jeweils zunächst kompakt und zusammenhängend der „Theorieteil" dargestellt. Im Anschluss daran gibt es „Aufgaben zur Vertiefung" von einem Umfang und Schwierigkeitsgrad wie man es aus gut geschriebenen mathematischen Lehrbüchern gewohnt ist, die speziell für die Lehrerausbildung konzipiert sind. Einige Autoren streuen – ebenfalls nicht ungewöhnlich – noch zusätzlich einige kürzere Aufgaben im Text ein.

Ein *Vergleich* des Umfanges der jeweils zusammengehörigen Abschnitte in den Kapiteln 1 und 3 ergibt folgendes Bild:

1. Mit Zahlen spielen (14 S.) / Stellenwertsysteme (22 S.): 36 Seiten
2. Sich Zahl um Zahl hochhangeln (19 S.) / Zahlenfolgen und vollständige Induktion (29 S.): 48 Seiten
3. Zahlen geschickt addieren (15 S.) / Summenformeln (18 S.): 33 Seiten
4. Zahlen mit Zahlen ausmessen (9 S.) / Elemente der Zahlentheorie (36 S.): 45 Seiten
5. Zählen ohne zu zählen (10 S.) / Elemente der Kombinatorik (20 S.): 30 Seiten
6. Mit Brüchen spielen (16 S.) / Elementare Theorie der Kettenbrüche (20 S.): 36 Seiten
7. Die Umwelt mit Zahlen erfassen: Modellbildung (24 S.) / Theoretische Vertiefung von Modellen (31 S.): 55 Seiten

Das *vierte* Kapitel (Begründung der Arithmetik: Rechengesetze und Zahlbegriff) ist untergliedert in die Abschnitte: Epistemologische Begründung der natürlichen Zahlen und der Rechengesetze (4.1), konstruktive Begründung der natürlichen Zahlen und der Rechengesetze (4.2) sowie endliche, abzählbare und überabzählbare Zahlenmengen (4.3). Die Zielsetzung dieses Kapitels wird in der Einleitung wie folgt beschrieben:

„Im Abschnitt 4.1 wird eine epistemologische Begründung der Rechengesetze der Arithmetik gegeben, die an die genetische Epistemologie von Jean Piaget anschließt und für den Mathematikunterricht besonders aussagekräftig ist. Der Abschnitt 4.2 liefert eine konstruktive Begründung, bei der die vollständige Induktion eine tragende Rolle spielt. Der letzte Abschnitt 4.3 befasst sich mit den Grundlagen der Mathematik im üblichen Sinne, nämlich mit der logischen Analyse des Anzahlbegriffs im Rahmen der Mengenlehre"(S. 16).

Das vierte Kapitel endet im Anschluss an den gesamten „Theorieteil" mit zehn, meist nur recht kurzen Aufgaben.

Der Band schließt insgesamt mit einer Kurzeinführung in die Tabellenkalkulation, welche die Nutzung des Computers auch für *die* Leser ermöglichen soll, die noch keine Erfahrungen mit Tabellenkalkulationsprogrammen haben sowie einem Stichwortverzeichnis. Ein zusammenfassendes *Literaturverzeichnis* fehlt. Es gibt nur jeweils am Ende der einzelnen Abschnitte meist nur zwischen 3 und 5 Titel umfassende Literaturhinweise. Besonders gering sind die Literaturhinweise im *ersten* Kapitel, wo man sich gerade unter verschiedenen Gesichtspunkten *viele* weiterführende Quellenhinweise gewünscht hätte. Eine gewisse Ausnahme bildet das geschichtliche Kapitel 2 mit immerhin 30 Literaturhinweisen.

**4. Zum Einsatz dieses Buches**

Zur Nutzung dieses Buches geben die Herausgeber folgende Hinweise aus ihrer Dortmunder Praxis:

„In der ersten Hälfte eines Semesters werden in der wöchentlichen „Vorlesung" Probleme aus Kapitel 1 vorgestellt und erklärt, die von den Studierenden selbstständig auszuarbeiten sind. In den wöchentlichen „Übungen" können sie sich dabei mit den Übungsleitern und den anderen Studierenden austauschen. Es wird deutlich unterschieden zwischen dem sogenannten „O-Skript" des Dozenten [O steht hierbei für Organisation; F. P.], das lückenhaft und skizzenartig ist, und den von den Studierenden angefertigten persönlichen „A-Skripten" [A steht hierbei für „Aktivität", F. P.], in denen die Bearbeitung der gestellten Probleme unter Einbeziehung des O-Skriptes in einem sauberen Text dokumentiert wird. In den „Vorlesungen" werden natürlich auch Anregungen zur Abfassung des „A-Skripts" gegeben. In der zweiten Hälfte des Semesters werden in den Vorlesungen dieselben Themen entsprechend Kapitel 3 noch einmal systematisch behandelt. Die Studierenden können dabei auf ihre Erfahrungen und Erkenntnisse bei der Erstellung des A-Skripts zurückgreifen und nehmen die Theorieausschnitte mit viel mehr Verständnis auf, als wenn diese ohne Vorlauf direkt behandelt werden" (S. 16/7).

Die in diesem Band systematisch behandelten arithmetischen Themenbereiche des dritten Kapitels bzw. die vorbereitenden Aufgabenkomplexe aus dem ersten Kapitel sind - so die Herausgeber - gegen andere durchaus austauschbar. „Jede(r) Dozent(in) kann ihre/seine Erfahrungen und Vorlieben einbringen" (S. 17).

Wie generell im Mathematikstudium spielen auch bei diesem Konzept „Übungsaufgaben" eine wichtige Rolle. Die Studierenden werden systematisch angeregt, eigenständig zu arbeiten.

„Am Anfang des Studiums müssen wir zwar mit schöner Regelmäßigkeit mehr oder weniger lautstarke Proteste registrieren, die sich vor allem gegen einen vermeintlich zu hohen Arbeitsaufwand und zu geringe „Hilfsangebote" seitens der Lehrenden richten. Im weiteren Verlauf des Studiums bewerten die Studierenden ihre durch eigene Aktivitäten erzielten Lernerfolge aber immer positiver" (S. 10).

Die Aufgaben am Ende der einzelnen Abschnitte von Kapitel 3 sollen jeweils in Form „geschlossener Texte“ (S. 17) bearbeitet werden. Auf Lösungshinweise zu diesen Aufgaben wird bewusst verzichtet.

**5. Mit Zahlen spielen/Stellenwertsysteme**

Diese beiden Abschnitte stammen von Anna Susanne Steinweg und Berthold Schuppar, (zusätzlich wird die Mitarbeit von Katrin Gordiken erwähnt).

Der *erste* Teil besticht durch ansprechende Aufgaben aus dem Umfeld der vier Grundrechenoperationen (z. B. ANNA-Zahlen, Muster bei der Addition und Multiplikation, Multiplikationsregeln von A. Ries, immer 1089, . . . ). Die benötigten Informationen werden gut und variationsreich (z. B. durch Schülerlösungen oder historische Texte) bereitgestellt und Begründungen sehr anschaulich z. B. mit Plättchen in der Stellenwerttafel oder mittels Rechteckfeldern präsentiert. So werden interessante innermathematische Entdeckungen durch das Spielen mit Zahlen ermöglicht.

Der *zweite* Teil fällt hiergegen deutlich ab. Thema dieses Teils sind die Idee des Stellenwertsystems, das Übersetzen von Zahlen in verschiedene Basen, das Rechnen in anderen Stellenwertsystemen, Teilbarkeitsregeln in dezimalen und nichtdezimalen Stellenwertsystemen, einige Anwendungen (Zauberkarten, NIM, . . . ) sowie Systembrüche. Während die beiden einleitenden Teile sowie die „Anwendungen“ überzeugend geschrieben sind, gilt dies nur mit Einschränkungen für die drei zentralen Bereiche dieses Abschnittes. Nach meinen Erfahrungen sind diese drei Teilabschnitte für Studierende des Lehramtes der Primarstufe oder Sekundarstufe I viel zu komprimiert geschrieben. So werden beispielsweise die Teilbarkeitsregeln für dezimale und nichtdezimale Stellenwertsysteme auf knapp 2 Seiten abgehandelt. Bei den Systembrüchen wird eine Begründung der Rechenoperationen schon im dezimalen Stellenwertsystem so gut wie gar nicht geleistet – ganz zu schweigen von nichtdezimalen Stellenwertsystemen. Ferner wird das Verständnis von Systembrüchen durch die Kürze der Darstellung sowie durch Fehler in der zentralen Abbildung (S. 203) stark belastet. Störend sind in diesem Abschnitt auch die nicht klare Unterscheidung von rationalen und reellen Zahlen oder die für Studierende sicher sehr überraschende Aussage „Dezimalbruchentwicklungen sind im allgemeinen *unendlich*“, die frühestens erst 2 Seiten später nach der Erläuterung des „Neunerschwanzes“ verständlich werden kann – um nur einige Beispiele zu nennen.

Zwischen den aktivierenden arithmetischen Aufgaben von 1.1 und der „arithmetischen Theorie“ in 3.1 könnte man sich durch eine *passendere* Auswahl der Inhalte durchaus einen *engeren* Zusammenhang im Sinne der in der Einleitung geforderten Ordnung der vorher gewonnenen eigenen Erfahrungen vorstellen.

**6. Sich Zahl um Zahl hochhangeln/Zahlenfolgen und vollständige Induktion**

Diese beiden Abschnitte stammen von Erich Wittmann und Jochen Ziegenbalg.

Im *ersten* Teil werden zunächst bei einfachen figurierten Zahlen Beweise mit Punktmustern („operative Beweise“) und symbolische Beweise durchgeführt und verglichen. Im 2. Teilabschnitt (1.2.2) wird u. a. durch Rückgriff auf ein schon 1988 von Müller/Wittmann gründlich dargestelltes Beispiel mit „Trapezzahlen“ ein überzeugendes Plädoyer für den Einsatz von „operativen Beweisen“ in der Lehrerausbildung gehalten – ein Ansatz, den ich nur nachdrücklich unterstützen kann. Dieser Ansatz wird auch schon in anderen Mathematiklehrbüchern für dieselbe Zielgruppe seit einiger Zeit an geeigneten Stellen eingesetzt, etwa unter der nicht ganz so prägnanten, möglicherweise eher Mißverständnisse produzierenden Formulierung „beispielgebundene Beweisstrategien“. Die Schwierigkeiten, die Studierende haben, operative Beweise als vollwertig anzuerkennen, werden sehr zutreffend beschrieben. Nach der Vorstellung elementarer Zahlenfolgen (arithmetische Folgen, geometrische Folgen, Folgen figurierter Zahlen, Fibonacci-Folge) werden zehn hiermit in engem Zusammenhang stehende Aufgaben zur Bearbeitung angeboten, um so eigene Erfahrungen im Umgang mit Plättchen– oder Punktmustern zu erwerben. Beim Hochhangeln von einer Stufe zur nächsten können so konkrete Erfahrungen bei der rekursiven Berechnung von Zahlenfolgen wie auch beim induktiven Beweis von Formeln gesammelt werden. Dieser erste Abschnitt ist insgesamt sehr schön und rund geschrieben und gut zur Aktivierung von Studierenden geeignet.

Im *zweiten* Teil („Zahlenfolgen und vollständige Induktion“) werden zunächst Zahlenfolgen allgemein beschrieben und durch Beispiele verdeutlicht, anschließend wird am Beispiel der Fibonacci-Folge die rekursive und die explizite Beschreibung von Folgen diskutiert sowie die Wertschätzung dieser beiden Darstellungsformen im Zeitablauf – auch aus philosophischer und wissenschaftstheoretischer Sicht – überzeugend dargestellt. Es schließt sich eine sehr gründliche und einfühlsame Einführung in das Beweisprinzip der vollständigen Induktion – und seiner Einbettung in die Peano-Axiome – an. Es folgt eine Fülle weiterer Beispiele zur vollständigen Induktion mit je verschiedener Funktion (unterschiedlicher Induktionsbeginn, Induktionsbeweise in geometrischen Kontexten, Beispiele, bei denen die vollständige Induktion aus unterschiedlichen Gründen nicht greift). Im Kontext der Fibonacci-Folge wird das als sehr ästhetisch empfundene Teilverhältnis des „goldenen Schnittes“ sowie die sehr interessante Lehre von den Blattstellungen (Phyllotaxis) thematisiert. Der Abschnitt endet mit zehn Aufgaben zur vollständigen Induktion.

Der zweite Teil dieses Abschnitts wie auch beide Teile insgesamt zeigen eindrucksvoll, wie ein für Studierende i. A. relativ schwieriges Gebiet sehr gut im Aufbau und in der Lesbarkeit präsentiert werden kann. Sehr schön ist auch der geglückte enge Zusammenhang zwischen diesen beiden Teilabschnitten und das gute Zusammenspiel von operativen Beweisen (in 1.2) und symbolischen Beweisen (dominant in 3.2).

**7. Zahlen geschickt addieren/Summenformeln**

Diese beiden Abschnitte sind von Petra Scherer und

Heinz Steinbring verfasst.

Im *ersten* Teil wird von der auf sieben Seiten ausführlich dargestellten Lösung der Aufgabe „Für welche natürlichen Zahlen $n$ ist es möglich, die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ in zwei summengleiche Teilmengen zu zerlegen“ ausgegangen (Lösungen von Grundschulkindern, von Studierenden, allgemeine Lösung), und es werden die nächsten beiden Aufgabenstellungen hieraus durch leichte Variation gewonnen (Menge der ersten $n$ geraden Zahlen, der ersten $n$ ungeraden Zahlen). Die übrigen sieben Aufgaben dieses ersten Abschnitts regen zur Beschäftigung mit der Summenbildung aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen (2 Aufgaben), mit der Frage ihrer Eindeutigkeit (2 Aufgaben) sowie der Summenbildung bei einfachen arithmetischen Reihen (nur der Anfang der Reihen wird jeweils betrachtet) mit vorgegebener Zielzahl an (3 Aufgaben). Punktmuster und vor allem Treppen werden als prägnante Darstellungen für die Argumentation vorgestellt (hierbei unterläuft bei der wichtigen Abb. 16 (S. 63) leider ein Fehler).

Der *zweite* Teil steht in einem sehr engen Zusammenhang zum ersten Teil. Ausgehend von den dortigen konkreten Überlegungen werden hier zunächst systematische Überlegungen zu Summen aufeinanderfolgender Zahlen (zunächst mit Treppenstufen, später mit Variablen) angestellt und das Ergebnis als Satz formuliert und bewiesen. Anschließend werden in Verallgemeinerung der letzten drei Aufgaben des ersten Teiles einfache arithmetische Reihen betrachtet und zwei Typen von Formeln abgeleitet (erstes und letztes Glied der arithmetischen Reihe bekannt bzw. erstes Glied und Abstand der Glieder bekannt; Ableitung zunächst mit Treppenstufen, dann mit Variablen). Diese Formeln werden zunächst auf entsprechende, einfache Probleme angewandt und bilden dann die Grundlage für die Bearbeitung weiterer, eng verwandter Problemstellungen (zunächst Anordnung der zu addierenden Zahlen in Dreiecksform, später in Quadrat– bzw. Rechteckform).

Der Umfang der „arithmetischen Theorie“, aber auch ihr Schwierigkeitsgrad ist bei der Thematik dieses 7. Abschnittes deutlich geringer als bei dem Thema des vorhergehenden 6. Abschnittes.

**8. Zahlen mit Zahlen ausmessen/Elemente der Zahlentheorie**

Der erste Teilabschnitt stammt von Lisa Hefendehl-Hebeker, der zweite Teilabschnitt von Gerhard Müller.

Der *erste* Teil besteht aus zehn überschaubaren, kleineren Aufgaben, mit deren Hilfe einige einfache Aussagen der elementaren Zahlentheorie anschaulich thematisiert werden. Nach einem motivierenden Einstieg über das Wiegen mit zwei Gewichten und somit – auf der Zahlenebene – der Thematisierung der Darstellung von natürlichen Zahlen als Summe oder Differenz der Vielfachen zweier Zahlen werden insbesondere folgende Fragestellungen behandelt: Anzahl der Teiler natürlicher Zahlen und Hassediagramme, Sieb des Eratosthenes, gemeinsame Teiler und gemeinsame Vielfache in geometrischen Kontexten (Parkettieren von Rechtecken, Vielfachbögen, Wechselwegnahme bei Rechtecken) sowie Reste bei der Division.

Im *zweiten* Teil erfolgt eine systematische Erklärung ausgewählter zahlentheoretischer Sachverhalte teils in Form operativer Beweise durch Rückgriff auf lineare Reihen/Zahlenreihen und rechteckige Felder/Zahlenfelder, überwiegend jedoch in Form symbolischer Beweise. Folgende Auswahl aus der elementaren Zahlentheorie wird meist nur in Teilaspekten auf relativ wenigen Seiten thematisiert: Teiler/Vielfache und einfache Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation, ggT und Euklidischer Algorithmus, kgV und der Zusammenhang von ggT und kgV, wechselseitiges Ausmessen von Zahlen und der chinesische Restsatz, Sieb des Eratosthenes und Folgerungen, Hauptsatz über die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung, der Kongruenzkalkül und der kleine Satz von Fermat, lineare diophantische Gleichungen sowie pythagoreische Zahlentripel. Das Kapitel endet mit einer Erklärung der wohltemperierten Tonleiter.

Zwischen dem ersten und zweiten Teil besteht offensichtlich ein enger thematischer Zusammenhang.

**9. Zählen ohne zu zählen/Elemente der Kombinatorik**

Diese beiden Abschnitte stammen von Christoph Selter und Hartmut Spiegel.

Ziel des *ersten* Abschnittes ist es, die Anzahl der Elemente bei komplex strukturierten Mengen geschickt zu bestimmen, ohne sie einzeln abzählen zu müssen. Durch motivierende Beispiele (Würfeln, Zahlen aus Ziffernkärtchen, Erinnerungsfoto, Blindenschrift, Zahlzerlegungen, Eiskugelpärchen, Zahlen mit gleichen Ziffern) wird anschaulich an wichtige Fragestellungen der Kombinatorik herangeführt – und dies mit sparsam gegebenen Hintergrundinformationen und mit dem „gesunden Menschenverstand“, aber bewusst *ohne* Einsatz irgendwelcher Formeln. Drei Aufgaben (Plättchen in Stellentafeln, Speisekarte, Wege im Gitternetz) werden im Text ausführlicher thematisiert, um so die grundlegende Idee des Sortierens sowie Baumdiagramme, 0-1-Folgen und das Gitterdiagramm als kombinatorische Werkzeuge gründlicher zu erarbeiten. Beim Lösen der überschaubaren Aufgaben und Teilaufgaben dieses Abschnittes ist zwar das Ergebnis nicht unwichtig, im Vordergrund steht jedoch das Verstehen und das Bewerten des eingeschlagenen Lösungsweges. Die Aufgaben führen zu drei wichtigen kombinatorischen Zählprinzipien, nämlich zur Additionsregel, zur Produktregel und zur Regel des indirekten Zählens, die im *zweiten* Abschnitt genauer behandelt werden.

Im *zweiten* Abschnitt stehen u. a. durch Rückgriff auf die konkreten Beispiele aus dem vorderen Teil folgende Inhalte der Kombinatorik systematisch im Blickfeld: Variationen, Permutationen sowie Kombinationen mit und ohne Wiederholung. In diesem Kontext werden die Summen- und Produktregel sowie die Regel des indirekten Zählen expliziert und die Binomialkoeffizienten vielseitig und gründlich thematisiert. Der Abschnitt endet mit einer tabellarischen Übersicht der vorher behandelten Haupt-Situationstypen. Die mit dieser Tabelle verbundene Gefahr, dass Studierende in ein Schubladendenken verfallen und nur nach der passenden Formel suchen, ist den Autoren bewusst. Der vorliegende Abschnitt konzentriert sich also auf das Abzählen mit elementaren Zählprinzipien. Weitere spannende, für die Zielgruppe mögliche Fragestellungen aus der Kombinatorik wie z. B. das Optimieren in Netzen werden vermutlich aus Umfangsgründen nicht angesprochen. Die im Text benutzten Aussagen werden im Regelfall mit dem Aufzeigen von Beweisstrategien anhand konkreter Beispiele begründet.

Insgesamt sind die beiden eng miteinander verzahnten Teilabschnitte sehr verständlich geschrieben und für die Zielgruppe gut motiviert.

**10. Mit Brüchen spielen/Elementare Theorie der Kettenbrüche**

Autor des ersten Teilabschnittes ist Erich Wittmann, des zweiten Teilabschnittes Gerhard Müller.

Der *erste* Teilabschnitt besteht nach einem kurzen Vorspann aus zehn Aufgaben. Die Überschrift „Mit Brüchen spielen" klingt zwar gut, es ist aber nur schwer zu erkennen, wo bei den meisten Aufgabenstellungen eigentlich das *Spielerische* liegt. Die Zusammensetzung der Aufgaben ist bunt gemischt und reicht beispielsweise vom Bilden von Folgen von Brüchen, über Kettenbrüche, Approximieren von Brüchen durch einfachere Brüche, Ägyptische Brüche, Ali Baba und die Kamele bis hin zur Dezimalbruchentwicklung von Brüchen. Gerade die *letzte* Aufgabenstellung, die viele sehr interessante Fragestellungen ermöglicht, wird hier in einer äußerst problematischen Form thematisiert, die kaum zu einer „aktiv-entdeckenden Bearbeitung" (S. 91) und zu einem gründlichen Verständnis dieses spannenden Gebietes beitragen dürfte. Drei problematische Punkte seien hier exemplarisch genannt:

– *Mißverständliche Formulierungen*
  Die Autoren formulieren: „Bei Ihren Rechnungen können Sie sich überzeugen, dass der Charakter der Dezimalbruchentwicklung nicht vom Zähler, sondern nur vom Nenner abhängt. Dies werden Sie gleich noch beweisen" (S. 104). Die erforderliche Teilerfremdheit von Zähler und Nenner taucht jedoch plötzlich erst eine Seite *später* auf, die eine Seite *vorher* stehende, beiläufige, einleitende Bemerkung, dass man die Brüche vor der Division kürzt, um nicht mit unnötig großen Zahlen rechnen zu müssen, wird kaum ein Studierender in diesem Sinne deuten und behalten.

– *Sehr formale Formulierungen*
  Zur Begründung eines wichtigen Musters in den Zwischenständen der Division im Zusammenhang mit der periodischen Dezimalbruchentwicklung wird formuliert: „Dies ist so, weil laufend Nullen heruntergeholt werden und das Komma für die Rechnung völlig belanglos ist" (S. 104).

– *Benutzung vorher nicht eingeführter Begriffe und Sätze*
  Urplötzlich werden bei der Behandlung der Dezimalbruchentwicklung die Kongruenzrelation mod $m$ und einige Eigenschaften von ihr als bekannt vorausgesetzt, obwohl sie bei der vorgesehenen Vorgehensweise (zunächst Kapitel 1, erst dann Kapitel 3) zuvor nicht eingeführt wird.

Der *zweite* Teilabschnitt beschäftigt sich mit der elementaren Theorie der Kettenbrüche. Folgende Inhalte werden angesprochen:Entwicklung positiver rationaler und reeller Zahlen in Kettenbrüche; Beobachtungen an Näherungsbrüchen – drei konkrete Beispiele; Vereinfachung der Berechnung von Näherungsbrüchen durch die Rekursionsformel – Beweis und Anwendung; Näherungsbrüche als bestmögliche Approximation für den Wert des jeweiligen Kettenbruches; Anwendung der Kettenbruch-Approximation zur Lösung praktischer Probleme beim Huygenschen Planetarium im 17. Jahrhundert und bei der astronomischen Uhr in Münster (1540, 1930).

Der Zusammenhang zwischen dem ersten und zweiten Teil basiert im Wesentlichen nur auf der vorbereitenden Thematisierung von Kettenbrüchen in Form *einer* Aufgabe im ersten Teilabschnitt. Die zehn Aufgaben des zweiten Teilabschnitts beziehen sich auf verschiedene Bereiche der Bruchrechnung und stehen ebenfalls nur z. T. im Zusammenhang mit den Kettenbrüchen.

Unter dem Gesichtspunkt *nützlichen Hintergrundwissens* für die Lehramtsstudierenden ist es überlegenswert, ob statt der Theorie der Kettenbrüche hier nicht sinnvollerweise systematisch der Zusammenhang zwischen gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen einschließlich genauerer Aussagen über die Periodenlänge sowie eine Verallgemeinerung für nichtdezimale Stellenwertsysteme thematisiert werden sollte. In diesem Fall könnte man auf die Fragmente zu diesem Thema in den Abschnitten 1.6 und 3.1 verzichten.

**11. Die Umwelt mit Zahlen erfassen: Modellbildung/Theoretische Vertiefung von Modellen**

Als Autor des ersten Teiles wird Heinrich Winter, des zweiten Teiles Peter Bender genannt. Beide Teilabschnitte unterscheiden sich sehr stark von den *übrigen* Abschnitten des ersten und dritten Kapitels: Dort steht die Bearbeitung innerarithmetischer Fragestellungen im Vordergrund, hier dagegen „die Auseinandersetzung mit Problemen der Lebenswelt, die sich mit Hilfe der Arithmetik beschreiben und rechnerisch behandeln lassen" (S. 107). Es geht hier also um Modellbildung.

Im *ersten* Abschnitt wird zunächst an einem Beispiel aus dem Themenkreis Kalender das Grundprinzip des Modellbildens gründlich erarbeitet. In diesem Zusammenhang werden wichtige heuristische Strategien zusammengestellt, am vorstehenden Beispiel expliziert und deskriptive und normative Modelle unterschieden. Drei Modellbildungsprozesse mit einer Mischung von deskriptiven und normativen Elementen stehen im Mittelpunkt dieses Abschnittes, nämlich die Themen Kalender, Sicherheit im Straßenverkehr und Zinsen. Hierbei will Winter den Rahmen „Schlauer Rechnereien"

(S. 113) bei weitem überschreiten und zugleich Aufklärung *und* mathematische Bildung anstreben. Die Grundlagen der drei Themenkreise werden sehr interessant und kenntnisreich jeweils in einem kompakten Block ohne geforderte Eigenaktivität der Studierenden dargestellt, bevor anschließend drei oder vier kurze und gut auf den „Theorie"-Teil bezogene Aufgaben formuliert werden.

Im *zweiten* Teil erfolgt – anders als die Überschrift suggeriert – keine *theoretische* Vertiefung des Modellbegriffes, sondern vielmehr eine *mathematisch* tiefer eindringende und z. T. weitergehende Ausarbeitung der drei Themenkreise des ersten Abschnittes unter den Überschriften „Der Kalender", „Die Beziehung zwischen Geschwindigkeits- und Orts-Zeit-Funktionen" und „Der effektive Zinssatz". Auch hier schließen sich an einen äußerst interessanten, kompakten „Theorie"-Teil ohne erkennbar eingeforderte Eigenaktivität der Studierenden drei bis vier kürzere, gut auf den Theorieteil bezogene Aufgaben an.

Für *beide* Teile gilt: Die drei ausgesuchten „Probleme der Lebenswelt" werden sehr interessant und kenntnisreich dargestellt. Eine Einforderung von *Eigenaktivitäten* der Studierenden – außer in den relativ kurzen Aufgabenteilen – ist dagegen kaum oder gar nicht zu erkennen und damit allerdings auch keine Arithmetik *als Prozess*. Vielleicht kann man jedoch aus der Tatsache, dass diese beide Teilabschnitte (mit immerhin 55 Seiten Umfang bei insgesamt rund 400 Seiten) dennoch in diesem Band erscheinen, schließen, dass dieses Prinzip auf anwendungsbezogene Inhalte vom Komplexitätsgrad der drei hier vorgestellten Themenkreise zumindest äußerst schwierig anzuwenden ist.

**12. Arithmetik im historischen Prozess: Wie „natürlich" sind die „natürlichen" Zahlen?**

Autoren dieses insgesamt rund 50 Seiten umfassenden *zweiten* Kapitels sind Peter Damerow und Siegbert Schmidt. Dieses historische Kapitel steht zwischen dem ersten Kapitel, das dem Sammeln von Erfahrungen durch arithmetische Aktivitäten dienen soll und dem dritten Kapitel über Ausschnitte arithmetischer Theorien. Das Kapitel gliedert sich in einen sehr kurzen Abschnitt mit dem Titel: „Psychologie und Geschichte des Zahlbegriffs – wie passen diese zusammen?" sowie in zwei umfangreichere Abschnitte mit den Überschriften „Alte Dokumente deuten, um dem Ursprung des Zählens und Rechnens nachzuspüren" und „Das Rätsel der Zahlen: ewig und doch historisch geworden", die schon gut die unterschiedliche Funktion dieser Abschnitte andeuten.

Der *erste* Teilabschnitt legt seinen Schwerpunkt auf die Unterscheidung von Repräsentationen erster bzw. zweiter und höherer Ordnung, wobei *letztere* Repräsentationen von mentalen Konstrukten sind. Der *zweite* Teilabschnitt stimuliert gekonnt anhand interessanter Dokumente aus der Geschichte des Zählens und Rechnens und dazu maßgeschneiderter Aufgabenstellungen die Lust zur selbstständigen Beschäftigung mit der Kernfrage dieses Kapitels: „Woher zum Teufel kennen wir eigentlich die „natürlichen Zahlen"?" (S. 133). Hierzu werden ausgewählte Dokumente aus verschiedenen Zeitepochen zur Verfügung gestellt: Archaische Wirtschaftstexte aus dem südlichen Mesopotamien, „babylonische Mathematik", „ägyptische Mathematik", Kalenderrechnungen der Maya, Mathematik als beweisende Wissenschaft in der Zeitspanne von Thales bis Euklid, Rechnen mit dem Akabus und schließlich „Abacisten" contra „Algoristen", also der Übergang zu dem heutigen dezimalen Stellenwertssystem mit seinen vielen praktischen Vorteilen. Der *dritte* Teilabschnitt greift die Inhalte des zweiten Abschnittes nochmals auf, aber jetzt „mit der Herausforderung, Ordnung in die historische Vielfalt der Methoden des Zählens und Rechnens zu bringen" (S. 133). Diese Ordnung wird gut erreicht durch eine systematische Darstellung der „Arithmetik im historischen Prozess" unter den übergreifenden Gesichtspunkten: Über die Geburtsstunde des Rechnens, Rechensysteme in frühen Hochkulturen, die Geburt der deduktiven Arithmetik und die neue Kunst der Rechenmeister, wobei der Schwerpunkt auf den beiden mittleren Gesichtspunkten liegt. Das Kapitel endet mit zehn Aufgaben, bei denen die Bezüge zu den vorangegangenen Abschnitten jeweils eindeutig hergestellt werden.

Bei einer Neuauflage dieses Bandes ist zu überlegen, ob die Anbindung dieses Kapitels an die anderen Kapitel nicht noch durch (weitere) gezielte Querverweise verbessert werden kann.

**13. Begründung der Arithmetik: Rechengesetze und Anzahlbegriff**

Autoren dieses *letzten*, 35 Seiten umfassenden Kapitels sind Gerd Walther und Erich Wittmann.

Im *ersten* und *zweiten* Abschnitt dieses letzten Kapitels werden zwei unterschiedliche Begründungen der Zahlen und der Rechengesetze gegeben („epistemologische" Begründung, „konstruktive" Begründung), der *dritte* und letzte Abschnitt beschäftigt sich unter der Überschrift „endliche, abzählbare und überabzählbare Mengen" mit dem Anzahlbegriff.

Bei der *„epistemologischen" Begründung* der natürlichen Zahlen und der Rechengesetze gehen G. Walther und E. Wittmann im Wesentlichen von drei bekannten Zählprinzipien aus, nämlich vom Eindeutigkeitsprinzip, vom Kardinalzahlprinzip und vom Prinzip der Irrelevanz der Anordnung, ohne ihre „Voraussetzungen" (S. 369) so zu benennen. Warum sie das Prinzip der stabilen Ordnung und das Abstraktionsprinzip an dieser Stelle nicht ebenfalls explizit hervorheben, ist nicht ganz verständlich. Auf der Grundlage allgemein anwendbarer Operationen mit Plättchenmengen (linear, in Rechteckform oder räumlich angeordnet) werden der Größenvergleich und die vier Rechenoperationen definiert und die Rechengesetze meist operativ (vgl. auch den 6. Abschnitt) und gelegentlich auch durch Rückgriff auf bereits hergeleitete Rechengesetze bewiesen. Hierbei betonen Walther/Wittmann in diesem Abschnitt nochmals das Charakteristikum *operativer* Beweise:

„... wir werden die Rechengesetze *operativ* beweisen, d. h.

wir leiten die Gesetze aus allgemein anwendbaren *Operationen* mit Plättchenmengen her, nicht aus Anzahlbeziehungen spezieller Plättchenmengen. Die Plättchen dienen uns lediglich zur Illustration der Operationen. Wir kommen daher mit kleinen Mengen aus“ (S. 369).

Die Begründungen und Herleitungen in diesem *ersten* Abschnitt sind weithin anschaulich und schulnah. Dennoch lassen sich hier bei einer Neuauflage einige Punkte noch optimieren:

– Eine hinreichend breite *Erläuterung*, die Studierenden gut verständlich das Charakteristikum *„epistemologischer“ Begründungen* deutlich macht und auch das Wort erläutert, fehlt leider. (Die Bemerkungen auf den Seiten 16, 366, 374 tragen für Studierende kaum zur Erhellung bei, im Index gibt es keinen Hinweis).

– Die *„Anzahlinvarianz“* (im Wesentlichen ist hiermit bei den Beweisen jeweils das Prinzip von der Irrelevanz der Anordnung gemeint) wird im Text im Zusammenhang mit den Beweisen *stark überbetont*, während die übrigen „Voraussetzungen“ vernachlässigt werden (Zitat S. 370: „Die unter (3) genannte *Anzahlinvarianz* wird der Dreh- und Angelpunkt unserer Überlegungen sein.“)

– Die Zahl der *Skizzen* sollte in diesem Abschnitt erhöht werden (so wären Skizzen beispielsweise bei den Umkehrgesetzen der Multiplikation und Division, beim Gesetz von der Konstanz des Produktes und beim Gesetz von den Konstanz des Quotienten hilfreich), die wichtige, aber fehlerhafte Skizze beim Assoziativgesetz (S. 372) sollte korrigiert werden.

– Der Einsatz *operativer Beweise* sollte *nicht überstrapaziert* werden. Dies gilt beispielsweise für den *ohne* jede Skizze durchgeführten operativen Beweis von der Konstanz des Produktes:

  „Zum Beweis des Gesetzes von der Konstanz des Produktes geht man von $a \cdot b$ aus und wandelt jede Zeile $b$ in das rechteckige Punktmuster $c \cdot (b : c)$ um. Dadurch entsteht ein Muster von $a \cdot c$ Reihen mit je $b : c$ Punkten. Die Gesamtzahl der Punkte ist nach dem Prinzip von der Anzahlinvarianz nicht verändert worden. Also gilt $a \cdot b = (a \cdot c) \cdot (b : c)$“ (S. 373).

– Bei den Punktmustern mit ganz konkreten, kleineren Zahlen verwirren die dort notierten *Variablen* $a, b, c$ in der gewählten Form vermutlich viele Studierende. Die „Variabilität“ der benutzten Zahlen sollte zumindest durch zwischengeschaltete kleine Punkte „. . . “ in den Punktmustern angedeutet werden.

– Die Aussage auf Seite 374 „Die in diesem Abschnitt gegebene Begründung der Struktur der natürlichen Zahlen unterscheidet sich grundsätzlich von den üblichen Begründungen“ ist so nicht haltbar, wenn man andere speziell für die *Lehrerausbildung* konzipierte Bände ansieht. Sie gilt so höchstens für konventionelle Lehrbücher für die Diplom- bzw. entsprechende Bachelor-/Masterausbildung.

Im *zweiten* Abschnitt erfolgt eine *„konstruktive“ Begründung* der Zahlen und Rechengesetze, und zwar in Anlehnung an den „Strichlistenkalkül“ des Logikers Paul Lorenzen, jedoch gänzlich *ohne* den Apparat der formalen Logik. Dennoch müssen die Autoren konzedieren, dass viele Teilabschnitte bei diesem Ansatz einem Marsch durch eine (öde) Wüste gleichen und können nur damit trösten, „dass auch ein Marsch durch die Wüste seine Reize hat und dass die Wüste manchmal sogar blüht“ (S. 378). Der hier vorgestellte Ansatz deckt sich inhaltlich weitgehend mit der axiomatischen Charakterisierung der natürlichen Zahlen als Ordinalzahlen im Sinne der Peano-Axiome (vgl. auch 6). *Überzeugende* Vorteile dieses „konstruktiven“ Ansatzes gegenüber dem üblichen Ansatz über die Peano-Axiome sind für mich *nicht* erkennbar.

Der *dritte* und letzte Abschnitt dient der Abrundung des Verständnisses der natürlichen Zahlen durch eine vertiefte Thematisierung des *Anzahlbegriffes*. Folgende, ganz kanonischen Inhalte werden angesprochen: Anzahlvergleich ohne Zählen – die Relation „gleichmächtig“; endliche Mengen; abzählbar unendliche Mengen (insbesondere die Mengen der ganzen und rationalen Zahlen); die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$; Hilberts Hotel (also das Paradoxon, dass eine „Vergrößerung“ und „Verkleinerung“ abzählbar unendlicher Mengen in starkem Umfang möglich ist, ohne dass die Eigenschaft „abzählbar unendlich“ verloren geht), überabzählbare Mengen (reelle Zahlen, Kontinuumshypothese, Erzeugen immer mächtigerer überabzählbarer Mengen durch sukzessives Bilden der Potenzmenge und so Gewinnung der Einsicht, dass die Stufung der Mächtigkeiten kein Ende hat); Unterscheidung von *aktual Unendlich* und *potentiell Unendlich* und knappes Anreißen der Probleme im Zusammenhang mit dem aktual Unendlichen.

Das 4. Kapitel endet mit zehn überschaubaren, „normalen“ Aufgaben. Arithmetik *als Prozess* ist in diesem Kapitel *kaum* verspürbar.

**14. Schlussbemerkungen**

Die vorgehenden Ausführungen enthalten schon eine Fülle von Bewertungen, so dass ich mich hier kürzer fassen kann.

– Arithmetik *als Prozess* zu organisieren und so mehr Eigenaktivität und mehr selbstgesteuerte Lernprozesse in das Studium der Studierenden zu bringen, ist ein schwieriges Unterfangen, wie dieser Band sehr klar belegt. Diese Grundidee ist nämlich nur im ersten Kapitel und z. T. im zweiten Kapitel für mich deutlich sichtbar realisiert, teilweise noch im dritten und kaum mehr im vierten Kapitel.

– Die Idee, zwei Autoren jeweils gemeinsam einen Abschnitt mit dem Schwerpunkt auf arithmetische

Aktivitäten (Kapitel 1) und den entsprechenden Abschnitt mit der Schwerpunktsetzung auf arithmetische Theorien (Kapitel 3) als *Team* bearbeiten zu lassen, ist gut, bereitet aber in der Praxis doch offensichtlich größere Abstimmungsprobleme – selbst bei diesem, weithin doch recht homogenen Autorenteam.

– Die *Ordnung* der im ersten Kapitel weithin eigenständig gewonnenen Erfahrungen hin zu Ausschnitten arithmetischer Theorien im dritten Kapitel schaffen die einzelnen Teams durchaus nur sehr unterschiedlich gut. Die Spannweite reicht von im Wesentlichen gerade nur *einer* gemeinsamen Aufgabe als Klammer zwischen beiden Teilen bis hin zu sehr gelungenen, gut zusammenhängenden Teilabschnitten im Sinne der beschriebenen Ordnung. Es stellt sich allerdings die Frage, ob es nicht sinnvoller ist, die zusammenhängenden Teile des ersten und dritten Kapitels *direkt nacheinander* zu thematisieren anstatt jeweils alle verschiedenen Themen des ersten bzw. dritten Kapitels en bloc zu erarbeiten.

– Der Einsatz von *„operativen“ Beweisen* – in diesem Band vor allem im ersten Kapitel, aber nicht nur dort realisiert – ist für viele Studierende für das Verständnis von Beweisen hilfreich und daher sehr zu begrüßen. Dies gilt auch für das insgesamt gut ausgewogene Verhältnis von operativen und symbolischen Beweisen.

– Die *Auswahl der Inhalte* in diesem Band kann unter dem Gesichtspunkt des *schulrelevanten* Hintergrundwissens noch weiter optimiert werden (Beispiel: Analyse der Dezimalbruchentwicklungen von Brüchen statt Kettenbrüche).

– *Querverweise* zwischen den einzelnen Kapiteln werden bislang zu selten gegeben. Sie würden die Lesbarkeit dieses Bandes erhöhen.

– Die *Literaturverweise* sind bislang ausgesprochen dürftig (mit Ausnahme des dritten Kapitels). Dies gilt ganz besonders für das erste Kapitel, wo hierdurch die Eigenaktivität der Studierenden weiter erhöht werden könnte, aber auch für das dritte und vierte Kapitel, wo so ausgewählte Fragestellungen in Eigeninitiative gründlicher oder vertiefter studiert werden könnten.

– Dieser Arithmetikband ist *sehr umfangreich.* Nach meiner Einschätzung lässt sich nur ein *Bruchteil* dieses umfangreichen Materials in einer normalen Semesterveranstaltung (3 SWS „Vorlesung“, 1 SWS „Übung“) sachgerecht realisieren, wenn man die eigenständige Aktivität der Studierenden möglichst oft in den Vordergrund stellt. Worauf soll verzichtet werden? Aktivitätsphase *und* Ordnen sind beide unverzichtbar, aber auch die geschichtlichen Aspekte und – zumindest in Teilaspekten – die Begründung der Arithmetik.

– Insgesamt lässt sich jedoch sagen:
Der vorliegende Band wird ganz sicher in vielerlei Hinsicht auf Kolleginnen und Kollegen anregend wirken und auch auf andere Autoren, die sich ebenfalls um eine gute, unterrichtsrelevante Erarbeitung und Vermittlung mathematischer Theorieausschnitte für die Lehrerausbildung bemühen. Der vorliegende Band ist durch seinen Aufbau und durch seine inhaltliche Gestaltung ein überzeugendes Beispiel dafür, dass und wie man *eigenständige* Mathematikkurse für die Lehrerausbildung anbieten muss und kann und dass man nicht einfach unreflektiert und fast unverändert Kurse für die Diplom– bzw. für die entsprechenden Bachelor- /Masterstudiengänge auf vielleicht etwas reduziertem Niveau für die Lehrerausbildung einsetzen darf.

**Autor:**
Padberg, Friedhelm, Prof. Dr., Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, Universitätsstr. 25, D-33615 Bielefeld, E-mail: padberg@math.uni-bielefeld.de