

Padberg, Friedhelm:

## **Didaktik der Arithmetik für Lehrerbildung und Lehrerfortbildung**

München: Elsevier GmbH, 2005. - 3. erweiterte, völlig überarbeitete Auflage, 350 S.

(Reihe: Mathematik Primar- und Sekundarstufe)

ISBN 3-8274-0993-4

Wilhelm Schipper, Bielefeld (Germany)

Auf den ersten Blick mag es ungewöhnlich erscheinen, ein Buch zu rezensieren, das seit fast 20 Jahren auf dem Markt ist. Lehrende der Didaktik der Grundschulmathematik kennen Padbergs „Didaktik der Arithmetik“ seit 1986. Studierende des Lehramts Grundschule mit dem Fach Mathematik haben sich fast zwei Jahrzehnte lang mit Hilfe dieses klar strukturierten und in verständlicher Sprache abgefassten Werkes auf ihre Lehramtsprüfungen vorbereitet. Das Werk ist bekannt. Bedarf es da noch einer Rezension dieses Klassikers?

Padberg nennt seine aktuelle Neuauflage selbst die „3. erweiterte, völlig überarbeitete Auflage“. Das ist sowohl hinsichtlich des Umfangs als auch der behandelten Inhalte absolut korrekt. Gegenüber der Erstauflage von 1986 ist das Werk um annähernd 100 Seiten umfangreicher geworden. In die Ausarbeitung der einzelnen Kapitel sind aktuelle mathematikdidaktische Erkenntnisse eingearbeitet. Vor allem hat sich die Grundkonzeption von einer stärker stoffdidaktischen Orientierung in der Erstauflage hin zu einer intensiveren Ausrichtung an den Lernprozessen der Schülerinnen und Schüler gewandelt.

Die Rezension eines so umfassenden Werkes muss sich notwendig auf einige wenige Aspekte beschränken. Zunächst werden Inhalt, Struktur und Konzeption des gesamten Werkes vorgestellt. Danach werden die Kapitel Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen sowie die Abschnitte „Schriftliche Subtraktion“ und „Schriftliche Division“ etwas ausführlicher behandelt, weil in diesen Inhaltsbereichen gegenwärtig die meisten Veränderungen im Arithmetikunterricht der Grundschule zu beobachten sind.

### **1. Inhalt, Struktur und Konzeption**

Die Grobgliederung der Neuauflage orientiert sich – wie ihre Vorgänger – an zentralen arithmetischen Inhalten des Mathematikunterrichts in der Grundschule: (I) Die ersten Zahlen, (II) Unsere Zahlschrift – das dezimale Stellenwertsystem, (III) Erweiterungen des Zahlenraums, (IV) Kopfrechnen, (V) Halbschriftliches Rechnen, (VI) Schriftliches Rechnen und (VII) Taschenrechner und Computer im Arithmetikunterricht. Das Kapitel „Üben im Arithmetikunterricht“ aus der zweiten Auflage ist entfallen; einige – insbesondere operative – Übungsformen werden integriert in den inhaltsbezogenen Kapiteln vorgestellt. Die so genannte „Neue Mathematik“, von der die Erstauflage noch stark geprägt und der in der zweiten Auflage immerhin noch ein eigener Abschnitt gewidmet

war, spielt in der aktuellen Auflage keine Rolle mehr. In den Umfängen der einzelnen Kapitel spiegelt sich die gegenwärtig wohl bedeutsamste inhaltliche Wende im Arithmetikunterricht der Grundschule wider, nämlich die Stärkung nichtschriftlicher Rechenverfahren gegenüber den schriftlichen. Während in der zweiten Auflage das Kapitel „Schriftliche Rechenverfahren“ mit einem Umfang von etwa 110 Seiten gegenüber den nichtschriftlichen Verfahren (ca. 75) Seiten eindeutig dominierte, liegt der Schwerpunkt in der Neuauflage deutlich beim Kopfrechnen und halbschriftlichen Rechnen; diese Themen werden auf zusammen fast 120 Seiten behandelt gegenüber nur noch gut 100 Seiten für das schriftliche Rechnen. Ein gesondertes Kapitel „Rechenschwäche“ fehlt, obwohl dieses Thema zunehmend an Bedeutung gewinnt. Aspekte dieses Themas werden aber, ähnlich wie beim Üben, integriert angesprochen.

Die Unterteilung der Kapitel in einzelne Abschnitte folgt dem Padberg'schen Ansatz der klaren und übersichtlichen Strukturierung. So haben z.B. die vier Hauptabschnitte (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) im Kapitel Kopfrechnen in den Unterabschnitten teilweise identische Zwischenüberschriften. Diese Stringenz der Gliederung gilt weitgehend auch für das Kapitel schriftliches Rechnen. Für die Zielgruppe dieses Werkes, die Studierenden, kann diese klare Struktur für das Verständnis der Inhalte und – für Studierende sicher ein wichtiger Aspekt – für die Prüfungsvorbereitung hilfreich sein. Allerdings ist sie manchmal auch nicht unproblematisch, nämlich dann, wenn zusammenhängende Inhaltsbereiche der gewählten Struktur wegen auf verschiedene Kapitel verteilt werden. Ein Beispiel dafür ist das Thema „Vorkenntnisse von Schulanfängern“, das zunächst in einem eigenen Abschnitt des ersten Kapitels, dann erneut an vier verschiedenen Stellen des vierten Kapitels behandelt wird. Sicher ist es von Vorteil, z.B. im Abschnitt Subtraktion die entsprechenden Informationen zu Vorkenntnissen von Schulanfängern bezogen auf diesen Inhaltsbereich zu erhalten. Nachteilig ist jedoch bei diesem Verfahren, dass die unterschiedlichen theoretischen Konzeptionen und die Unterschiede im Detail bei den Aufgabenstellungen in den verschiedenen Studien in den Hintergrund rücken. Dabei besteht die Gefahr, dass empirische Befunde miteinander verglichen werden, die wegen der o.g. Unterschiede nicht ohne weiteres miteinander vergleichbar sind. Abgemildert wird dieses Problem jedoch durch die zahlreichen internen Querverweise, die es den Lesern erlauben, auch quer zur realisierten Systematik einen anderen roten Faden zu verfolgen.

In den vier umfangreichsten Kapiteln I, IV, V und VI werden die Inhalte aus sehr vielen unterschiedlichen Perspektiven behandelt. Neuere empirische Studien werden herangezogen und auf ihre didaktischen Konsequenzen untersucht. Die fachlichen Grundlagen (z.B. Rechengesetze) werden knapp dargestellt oder es wird auf weiterführende Literatur verwiesen. Den für den jeweiligen Inhalt besonders wichtigen didaktischen Aspekten (z.B. Arbeitsmittel) wird dagegen deutlich mehr Raum gewidmet. Dabei wird der Bogen gespannt von den unterrichtlichen Möglichkeiten der Einführung in das Thema über mögliche Sonderfälle und Klippen (z.B. Division mit

Null oder viele Nullen im Minuenden bei der schriftlichen Subtraktion nach dem Verfahren des Abziehens mit Entbündeln) bis hin zu Möglichkeiten des Übens. Besonders intensiv behandelt Padberg in diesen Kapiteln einerseits die Rechenstrategien, andererseits die typischen und systematischen Fehler. Damit gibt er angehenden Lehrerinnen und Lehrern wichtiges Rüstzeug für einen Unterricht mit auf den Weg, der sich an den gelingenden bzw. misslingenden Lernprozessen von Kindern orientiert. Während in der Erstauflage von 1986 noch stoffdidaktische Analysen im Vordergrund standen, ist die Neuauflage vor allem durch diese stärkere Orientierung an den Lernprozessen der Schülerinnen und Schüler charakterisiert. Sowohl in den Details der Aufarbeitung der einzelnen Kapitel als auch in der Grundkonzeption erweist sich die Padberg'sche „Didaktik der Arithmetik“ damit als ein Werk, das den aktuellen Stand der Mathematikdidaktik widerspiegelt.

Das Buch ist in mehrfacher Hinsicht leserfreundlich gestaltet. Allein das Inhaltsverzeichnis umfasst sechs Druckseiten, ist also so detailliert, dass die Leser schon auf diesem Wege spezielle didaktische Themen finden können. Zusätzlich gibt es einen Index mit etwa 350 Schlagwörtern, der ebenfalls das schnelle Finden spezieller Themen erlaubt. Für vertiefende Studien findet man zahlreiche Quellen in dem mit 335 Titeln sehr ausführlichen Literaturverzeichnis.

## 2. Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen

Padberg behandelt das Kopfrechnen und das halbschriftliche Rechnen in zwei verschiedenen Kapiteln (IV bzw. V). Das Kapitel „Kopfrechnen“ ist unterteilt in vier Abschnitte zu den vier Grundrechenarten. Jeder dieser Abschnitte beginnt mit der Darstellung empirischer Studien zu Vorkenntnissen und schließt mit einem Unterabschnitt „Problembereiche“. In dem Kapitel „Halbschriftliches Rechnen“ werden zunächst Begriff und Bedeutung dieser Rechenart geklärt, dann die Hauptstrategien vorgestellt, Forschungsergebnisse referiert und schließlich Stärken und Problembereiche des halbschriftlichen Rechnens sowie didaktische Konsequenzen dargestellt. Fachliche Grundlagen werden sehr knapp dargestellt, häufig wird nur auf weiterführende Literatur verwiesen. Dieses Vorgehensweise ist angesichts der Stoff-Fülle sicher gerechtfertigt. Die Darstellung ist sehr praxisorientiert; dazu tragen auch die zahlreichen Beispiele aus aktuellen Schulbüchern bei – nicht nur in diesen hier etwas ausführlicher beschriebenen Kapiteln.

Die getrennte Darstellung dieser beiden inhaltlich eng zusammenhängenden Themen „Kopfrechnen“ und „Halbschriftliches Rechnen“ in zwei verschiedenen Kapiteln ist nicht unproblematisch. Denn die Übergänge zwischen dem Kopfrechnen und dem halbschriftlichen Rechnen, das Padberg zu Recht auch als „gestütztes Kopfrechnen“ bezeichnet, sind fließend. Sicher lassen sich beide Bereiche formal sauber unterscheiden: Beim reinen Kopfrechnen findet keine Notation einer Zwischenrechnung bzw. eines Zwischenergebnisses statt, während „Halbschriftliches Rechnen“ immer mit solchen Notationen verbunden ist. Wichtiger als diese formale Unterscheidung sind aber wohl die inhaltlichen Übereinstimmungen insbesondere bezogen auf die Rechenstrate-

gien. Denn beim Rechnen im Zahlenraum bis 100 unterscheiden sich die Strategien des Kopfrechnens grundsätzlich nicht von denen des halbschriftlichen Rechnens.

Aus der von Padberg gewählten Darstellung dieser beiden Themen in zwei verschiedenen Kapiteln resultieren zwei Probleme. Erstens gibt es wegen der inhaltlichen Übereinstimmungen zwischen dem Kopfrechnen im Zahlenraum bis 100 und dem entsprechenden halbschriftlichen Rechnen eine besondere Anhäufung von Querverweisen (vgl. S. 166). Zweitens gibt es inhaltliche Unstimmigkeiten. Im Abschnitt 1.6 des Kapitels Kopfrechnen werden die folgenden heuristischen Strategien unterschieden: (1) Schrittweises Rechnen, (2) Gegensinniges Verändern, (3) Analogieaufgaben, (4) Tauschaufgaben, (5) Nachbaraufgaben, (6) Verdoppelungs- und Fastverdoppelungsaufgaben. An dieser Stelle könnte man sicher diskutieren, wo die Grenzen zwischen heuristischen Strategien und operativen Übungen liegen. Tauschaufgaben und Nachbaraufgaben beispielsweise werden üblicherweise den operativen Grundaufgaben zugeordnet. Andererseits kann man aber auch im Nutzen einer Tauschaufgabe eine arbeitserleichternde heuristische Strategie sehen ( $36+8$  statt  $8+36$ ) und die Bearbeitung von Nachbaraufgaben als gute Vorbereitung der Nutzung von Hilfsaufgaben verstehen. Hier sind die Grenzen sicher fließend; die in der Mathematikdidaktik in diesem inhaltlichen Kontext verwendete Begrifflichkeit ist – wie Padberg zu Recht auf S. 172 feststellt – nicht einheitlich. Unverständlich ist aber, warum im Kapitel „Kopfrechnen“ die heuristischen Strategien „Hilfsaufgabe“ und „Stellenweises Rechnen“ nicht genannt werden. Beide Strategien werden erstmals im Kapitel „Halbschriftliches Rechnen“ auf Seite 166 erwähnt, obwohl beide unzweifelhaft auch heuristische Strategien sind, die von Kindern schon beim Kopfrechnen, nicht erst beim halbschriftlichen Rechnen genutzt werden.

Der gegenüber den bisherigen Auflagen neue Abschnitt 4 „Einige Forschungsergebnisse zum halbschriftlichen Rechnen“ im Kapitel V stellt eine sehr gute Auseinandersetzung mit neueren empirischen Befunden zum halbschriftlichen Rechnen sowie der aus ihnen zu ziehenden Konsequenzen dar. In diesem Abschnitt zeigt Padberg, dass er extremen didaktischen Positionen gegenüber kritisch eingestellt und ein Befürworter einer ausgewogenen didaktischen Konzeption unter Berücksichtigung der Möglichkeiten und Grenzen der Praxis des Mathematikunterrichts ist. Die auch von Padberg nachhaltig unterstützte Zielvorstellung, die Kinder sollten die halbschriftlichen Verfahren für ein flexibles Rechnen nutzen, vergleicht er mit dem Unterrichtsalltag, wie er sich in den Befunden empirischer Studien von Selzer und vielen anderen (vgl. S. 179) widerspiegelt. Die Diskrepanz zwischen Zielvorstellung und empirischen Befunden ist extrem groß. Manche theoretisch zu erwartenden Strategien werden auch in großen Stichproben gar nicht genutzt. Berechtigterweise kann aus solchen Befunden als didaktische Konsequenz gefordert werden, die unterrichtlichen Bemühungen in diesem Bereich zu intensivieren. Padberg sieht aber auch, dass die Veränderungen in der Lehrerbildung beginnen müssen, erkennt an, dass für nicht wenige Schüler normierte und automatisierte Verfahren entlastend wirken können, dass für besonders leistungs-

schwache Kinder das Ziel der rechnerischen Flexibilität vielleicht zu hoch gesteckt ist u.v.a.m.. Auf insgesamt neun Seiten diskutiert er Stärken und Problembereiche des halbschriftlichen Rechnens sowie Konsequenzen für den Unterricht und hilft dadurch den Lesern, selbst zu einem ausgewogenen Urteil zu kommen.

### 3. Schriftliche Subtraktion und Division

Eine der auffälligsten Veränderungen im Arithmetikunterricht der Grundschule in den letzten 10 Jahren findet gegenwärtig im Bereich der schriftlichen Subtraktion statt. Am 25.3.1958 hatte die KMK beschlossen, dass in allen deutschen Grundschulen das ergänzende Rechnen bei der Subtraktion zu unterrichten sei. Durch die Lehrpläne der Bundesländer wurden aus diesen Empfehlungen verbindliche Vorschriften, die etwa ein halbes Jahrhundert lang das schriftliche Subtraktionsverfahren im Detail festgelegt haben. Die Folge war, dass ganze Schülergenerationen einen Algorithmus lernen mussten, ohne kaum eine Chance zu haben, ihn zu verstehen.

Durch einen Erlass des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen vom 10.09.1996 ist diese starre Festlegung erstmals gelockert worden; in diesem Erlass wird die Wahl des Verfahrens der schriftlichen Subtraktion den Lehrkräften freigestellt. Einige Bundesländer sind inzwischen diesem Vorbild gefolgt und haben in ihren neuen Lehrplänen das Subtraktionsverfahren freigegeben. Der im Jahre 2000 erschienene bayerische Lehrplan legt sogar fest, dass künftig das Verfahren „Abziehen mit Entbündeln“ zu praktizieren ist, nur noch ausnahmsweise das bisherige ergänzende Rechnen erlaubt wird. Im Dezember 2002 hat dann auch die KMK in aller Stille die alte Empfehlung aufgehoben, indem sie den Anhang ihrer alten 58er Empfehlung (einschließlich der Folge-Empfehlungen), in der das Verfahren des ergänzenden Rechnens bis hin in die Sprechweise festgelegt war, außer Kraft gesetzt hat.

Über die Freigabe des Verfahrens ist auch im Kreis der Mathematikdidaktiker kontrovers diskutiert worden (z.B. Heft 119 der Grundschulzeitschrift, 1998). Vor allem aber sind die Schulpraktiker verunsichert, weil ein jahrzehntelang von ihnen unterrichtetes Verfahren nun zugunsten eines anderen aufgegeben werden soll. An dieser Stelle sind die informierenden und zugleich klar Position beziehenden Ausführungen von Padberg besonders erfreulich und für Studierende und praktizierende Lehrkräfte sicher sehr hilfreich. Er informiert zunächst über fünf verschiedene Möglichkeiten, Aufgaben zur schriftlichen Subtraktion zu lösen, und stellt in einer ersten vergleichenden Bewertung größere Vorteile für das Verständnis beim Abziehverfahren und bei der Entbündelungstechnik fest. Nach einem kurzen Blick ins Ausland berichtet Padberg über einschlägige empirische Studien und macht dabei deutlich, dass das Abziehen mit Entbündeln das vorzuziehende Verfahren ist, wenn es das Ziel des Unterrichts ist, dass die Kinder das Verfahren auch verstehen, nicht nur schematisch beherrschen. Der in seinen didaktischen Bewertungen sonst so ausgewogene Padberg wagt an dieser Stelle die Prognose: „... sind wir überzeugt, dass sich das *Entbündeln* kombiniert mit dem *Abziehen* ... auch in Deutschland sehr bald *weithin* durchsetzen wird.“ (S. 236)

Der Abschnitt zur schriftlichen Division ist demgegenüber wieder eher moderat vorausschauend abgefasst. Padberg sieht zwar, dass auch in diesem Inhaltsbereich Veränderungen in Richtung einer Stärkung des Verständnisses notwendig sind und macht auch (auf S. 294) einen konkreten Vorschlag, wie ein stärker verständnisorientiertes Verfahren der schriftlichen Division in der Grundschule aussehen könnte, er stellt aber nicht grundsätzlich die Behandlung dieses vierten Algorithmus in der Grundschule in Frage. Dieser Abschnitt zur schriftlichen Division wird wohl als nächstes für eine „völlig überarbeitete Auflage“ anstehen. Denn in der Zwischenzeit hat die KMK in den am 15.10.2004 beschlossenen „Bildungsstandards im Fach Mathematik, Jahrgangsstufe 4“ festgelegt, dass die schriftliche Division *nicht* zu den Standards der Grundschulmathematik zählt. Das wirft viele neue Fragen auf. Die Standards sind als Regelstandards, nicht als Mindeststandards angelegt. Ist daraus abzuleiten, dass die Beherrschung der schriftlichen Division auch bezogen auf den noch relativ einfachen Fall der Division mit einem einstelligen Divisor „im Regelfall“ nicht mehr erwartet wird? Soll etwa die schriftliche Division künftig in der Grundschule gar nicht mehr behandelt werden? Soll nur das intensive Einüben des Algorithmus zugunsten einer stärker verständnisorientierten Behandlung der Division, insbesondere auch der halbschriftlichen Division, reduziert werden? Wie werden die Bundesländer, denen ja die Umsetzung der Standards auferlegt ist, auf diese Festlegung reagieren? Viele Fragen, auf deren Antwort wir in der „4. erweiterten, völlig überarbeiteten Auflage“ der „Didaktik der Arithmetik“ von Padberg gespannt sein können.

### 4. Zusammenfassung

Padbergs „Didaktik der Arithmetik“ ist, wie die Titelergänzung „für Lehrerbildung und Lehrerfortbildung“ zeigt, in erster Linie für Studierende, in zweiter Linie für praktizierende Lehrerinnen und Lehrer geschrieben worden. Für diese Zielgruppen ist das Werk sehr gut geeignet. Gemessen an den zahlreichen Publikationen zur Arithmetik in der Grundschule in Büchern und Fachzeitschriften ist die „Didaktik der Arithmetik“ trotz ihrer 350 Seiten ein knapp gehaltenes, zugleich aber über alle wichtigen Aspekte der Arithmetik in der Grundschule informierendes Buch. Wer ein ausgewähltes Thema vertiefend studieren möchte, findet hier Hinweise auf weiterführende Literatur. Durch die klare Strukturierung, eine verständliche Sprache und durch die zahlreichen Praxisbeispiele erschließen sich die Inhalte auch solchen Studierenden, deren Herz möglicherweise nicht bei der Mathematik hängt. Auch sie erhalten mit diesem Buch eine erste grundsätzliche Ausbildung zur Didaktik der Arithmetik, auf der in der zweiten Ausbildungsphase und in späteren eigenen Unterrichtserfahrungen gut aufgebaut werden kann.

Autor

Schipper, Wilhelm, Prof. Dr., Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Universitätsstraße 25, D-33615 Bielefeld.

E-mail: [wilhelm.schipper@uni-bielefeld.de](mailto:wilhelm.schipper@uni-bielefeld.de)