Schülerprobleme beim Lösen von geometrischen Beweisaufgaben – eine Interviewstudie[1] –

Aiso Heinze, Augsburg (Germany)

Abstract: In this article we report on an interview study involving ten grade 8 students. These interviews served as a qualitative supplement for a large-scale quantitative study on proof and argumentation (N=659). During videotaped interviews the students were asked to solve geometrical proof problems. The results indicate that students' difficulties with proof and logical argumentation may be explained by insufficient knowledge of facts, deficits in their methodological knowledge about mathematical proofs, and a lack of knowledge with respect to developing and implementing a proof strategy. Low-achieving students show difficulties with respect to all these three aspects, whereas high-achieving students' difficulties are mainly based on deficits of developing an adequate and correct proof strategy.

Kurzreferat: In diesem Beitrag wird über eine Interviewstudie mit zehn Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 8 berichtet, die als qualitative Ergänzung zu einer quantitativen empirischen Untersuchung mit 659 Probanden durchgeführt wurde. Die Probanden, die in der 7. und 8. Klasse an schriftlichen Tests teilgenommen hatten, wurden beim Lösen geometrischer Beweisaufgaben videografiert und anschließend befragt. Es zeigt sich, dass Schülerschwierigkeiten bei diesen Aufgaben im Wesentlichen auf das Faktenwissen, das Methodenwissen zum mathematischen Beweisen und die Entwicklung und das Verfolgen einer Beweisstrategie zurückgeführt werden können. Während schwächere Schüler in allen drei Bereichen Defizite aufweisen, liegen die Schwierigkeiten der stärkeren Probanden vor allem in der Entwicklung einer Beweisstrategie.

ZDM-Classification: E53, C33

1 Einleitung

Die Bedeutung des Argumentierens, Beweisens und Begründens im Mathematikunterricht und in der mathematikdidaktischen Forschung hat in den letzten Jahren stetig zugenommen. Nach dem Scheitern der Neuen Mathematik in den 70er Jahren und insbesondere auch durch die Überbetonung des Formalismus wurde das mathematische Beweisen als eher innermathematischer Aspekt in den 80er Jahren als weniger wichtig angesehen. Erst Mitte der 90er Jahre stieg die Bedeutung des Beweisens für den Mathematikunterricht wieder und wurde im Jahr 2000 sogar als einer von zehn Standards der National Council of Teacher in Mathematics (NCTM) aufgeführt (NCTM, 2000).

In der Bundesrepublik rückte das mathematische Argumentieren und Beweisen vor allem auch durch die vieldiskutierten Ergebnisse in den empirischen Vergleichsstudien TIMSS und PISA wieder in den Mittelpunkt (vgl. Baumert et al., 1997; Deutsches PISA-Konsortium, 2001). TIMSS und PISA sowie die nachfolgenden Diskussionen förderten auch eine zunehmend empirische Ausrichtung der mathematikdidaktischen Forschung auf diesem Gebiet, um die Ursachen für die vergleichsweise schwachen Schülerleistungen in Deutschland zu ermitteln. Ein Schwerpunkt in dieser Forschung ist die Identifikation von kognitiven und nichtkognitiven Variablen, die Einfluss auf die Beweiskompetenz der Schülerinnen und Schülern haben.

2 Begründen und Beweisen als ein Lernziel des Mathematikunterrichts

Beweise stellen zusammen mit Axiomen, Definitionen, Theoremen und in neuerer Zeit verstärkt auch Vermutungen das Gerüst der Wissenschaft Mathematik dar. Trotz dieser großen Bedeutung und trotz der viel gerühmten Exaktheit der Mathematik gibt es allerdings nirgends eine genaue Charakterisierung für einen mathematischen Beweis. Allenfalls notwendige Eigenschaften wie widerspruchsfrei, nicht zirkulär usw. werden im Allgemeinen genannt. Was zunächst seltsam wirkt, ist eigentlich nur die Bestätigung dafür, dass auch die Wissenschaft Mathematik ein Ergebnis sozialer Prozesse ist. Im Vergleich zu anderen Wissenschaften gibt es in der Mathematik bei diesen sozialen Prozessen allerdings eine erstaunliche hohe Kohärenz und einen hohen Grad an Konsens (Heintz, 2000).

Die Tatsache, dass Mathematik ein Resultat sozialer Prozesse ist, stellt die Mathematikdidaktik vor die Frage, inwieweit ähnliche soziale Prozesse beim Lehren und Lernen von Mathematik eine Rolle spielen sollen. Der berühmte Mathematiker Juri Manin schrieb „a proof becomes a proof after the social act of accepting it as a proof “ (Manin, 1977). Soll dies auch in der Schule gelten, wo die Schülerinnen und Schüler durch soziale Prozesse entscheiden, was im Unterricht als Beweis akzeptiert wird und was nicht (vgl. die Diskussion in Knipping, Dreyfus & Krummheuer, 2002 und Heinze & Reiss, 2002)? Geht man davon aus, dass der Mathematikunterricht ein authentisches Bild der Mathematik vermitteln soll, so ist letztendlich eher eine Orientierung an der Wissenschaft Mathematik den sozialen Prozessen bei Schülern zur Entwicklung eigener mathematischer Standards vorzuziehen. In diesem Sinne orientiert sich auch dieser Beitrag hinsichtlich des Beweisbegriffs an den Standards der wissenschaftlichen Mathematik mit einem Abstrich am Grad der Strenge und des Formalismus.

In der Mathematikdidaktik hat es in den letzten Jahren eine Reihe von Beiträgen zum Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht und dem Aufbau des Beweisverständnisses bei Schülerinnen und Schülern gegeben. Neben der Entwicklung von Konzepten wie die des inhaltlich-anschaulichen Beweisens (Wittmann & Müller, 1988) und des präformalen Beweises (Blum & Kirsch, 1991) wurden Beweisfunktionen untersucht (z.B. Hanna & Jahnke, 1996; de Villiers, 1990) und Modelle des Beweisprozesses hergeleitet (z.B. Steinhöfel & Reichhold, 1971; Stein, 1984; Boero, 1999). Die letztgenannten Beschreibungen des Beweisprozesses machen deutlich, wie komplex das mathematische Beweisen eigentlich ist. Boero (1999) unterteilt den Beweisprozess in sechs Pha-

[1] Die Untersuchung entstand im Rahmen des DFG-Projektes „Beweisen und Begründen in der Geometrie“ (RE 1247/4-1) im Schwerpunktprogramm „Bildungsqualität von Schule“.

sen. Die ersten beiden Phasen sind die *Entwicklung einer Behauptung* und die *Formulierung der Behauptung nach den formalen Konventionen.* Hier geht es um die Exploration der Problemstellung, die Identifikation und Untersuchung von Gesetzmäßigkeiten sowie erste Plausibilitätsbetrachtungen zur Gültigkeit der Behauptung u. a. auf Grundlage von intuitiven und empirisch-induktiven Argumenten. Dies wird mit der Formulierung der Behauptung als ordnendes Element abgeschlossen. Die *Exploration der Hypothese und möglicher Argumentverknüpfungen* bildet die dritte Phase, in der die eigentliche Hypothesenprüfung durchgeführt wird. Hier werden die Behauptung und die Beziehung zwischen Hypothese und Theorie geprüft, wobei induktive und deduktive Schritte in Interaktion stehen. Am Ende sollte eine grobe Beweisstrategie vorhanden sein. Die vierte Phase umfasst die *Auswahl von Argumenten und ihre Verknüpfung zu einer Kette von Deduktionsschlüssen*. Dabei wird der Beweisweg durch eine Kette mathematischer Argumente abgesichert; empirisch-induktive Begründungen oder Plausibilitätsargumente sind hier nicht mehr zugelassen. Schließlich folgt die fünfte Phase *Organisation der Argumente zu einem Beweis, der den mathematischen Publikationsstandards entspricht* und die eher theoretische sechste Phase *Annäherung an einen formalen Beweis*.

Trotz der erwähnten Entwicklung in der Mathematikdidaktik im Bereich des Beweisens und Begründens sind die Auswirkungen auf den Mathematikunterricht scheinbar gering. So zeigen die Schülerinnen und Schüler bei Argumentations- und Beweisaufgaben im Mittel eher unbefriedigende Leistungen. Die internationalen Vergleichstudien TIMSS und PISA, in denen ebenfalls derartige Aufgaben eingesetzt wurden, haben dabei z. T. große Unterschiede zwischen den einzelnen Ländern zu Tage gebracht. Ergebnisse einer tiefer gehenden Analyse der TIMSS II-Items weisen darauf hin, dass die Schülerinnen und Schüler aus der deutschen Stichprobe insbesondere bei den Aufgaben Probleme haben, deren Lösung eine Kombination von mehreren Teilschritten erfordert. Die Stärken liegen dagegen u. a. bei einschrittig lösbaren Aufgaben und der Reproduktion von Faktenwissen (vgl. Beiträge in Blum & Neubrand, 1998). Zieht man andere empirische Untersuchungen heran, die den Fokus speziell auf den Bereich Argumentieren und Beweisen gelegt haben, so zeigen sich bei den Probanden nicht nur Defizite beim eigenständigen Führen von Beweisen bzw. Lösen von Argumentationsaufgaben, sondern auch im Bereich der Methodenkompetenz zum mathematischen Beweisen (vgl. z.B. Harel & Sowder, 1998; Healy & Hoyles, 1998; Lin, 2000; Reiss, Klieme & Heinze, 2001; Reiss, Hellmich & Thomas, 2002).

In einer Untersuchung mit 81 Abiturienten konnten Reiss, Klieme & Heinze (2001, 2002) den Einfluss des Begriffsverständnisses, der Methodenkompetenz und der Metakognition auf die Schülerleistungen bei geometrischen Beweisaufgaben zeigen. In der britischen Beweisstudie von Healy & Hoyles (1998) mit mehr als 2400 Schülerinnen und Schülern der zehnten Klasse (year 10 students) konnte nachgewiesen werden, dass größeres Faktenwissen mit besseren Leistungen bei Beweisaufgaben einhergeht. Allerdings zeigte sich in dieser Studie auch, dass das Faktenwissen eine notwendige aber keine hinreichende Bedingung für eine erfolgreiche Beweiskonstruktion war. Einfluss hatte beispielsweise auch die Vorstellung der Probanden über die Funktion mathematischer Beweise.

In einer Untersuchung mit 659 Schülerinnen und Schülern des Gymnasiums am Ende der Klasse 7 konnte ebenfalls der Einfluss des Methodenwissens auf die Beweiskompetenz festgestellt werden (Reiss, Hellmich & Thomas, 2002). Zudem wurde auf der Basis der umfangreichen empirischen Daten ein Kompetenzstufenmodell mit drei Kompetenzstufen entwickelt. Die erste Kompetenzstufe umfasst dabei das Anwenden einfacher Regeln und Schlussfolgerungen (beispielsweise in Berechnungsaufgaben), die zweite Kompetenzstufe entspricht dem Durchführen einer einschritten Argumentation und die dritte Kompetenzstufe umfasst schließlich die Verkettung von mehreren Argumenten. Der eingesetzte Geometrietest enthält Aufgaben zu allen drei Kompetenzstufen, welche sich auf einer Leistungsdimension anordnen lassen (die Daten können nach Dichotomisierung durch das einklassige Rasch-Modell modelliert werden). Es konnte damit gezeigt werden, dass sich die Ergebnisse des unteren, mittleren und oberen Leistungsdrittels der Stichprobe mit den Ergebnissen zu den Aufgaben der drei Kompetenzstufen korrespondiert, d.h. insbesondere, dass Aufgaben der Kompetenzstufe III im Mittel nur vom oberen Leistungsdrittel einigermaßen bewältigt werden, während das untere Leistungsdrittel an Items der Kompetenzstufen II und III scheitert (Reiss, Hellmich & Thomas, 2002).

Aus schriftlichen Tests, die nach einem punktebasierten Schema ausgewertet werden, kann nicht unbedingt im Detail auf die Schülerschwierigkeiten bei den Testaufgaben geschlossen werden. Zu diesem Zwecke sind entweder detailliertere Auswertungen der schriftlichen Schülerlösungen notwendig oder eine Ergänzung der schriftlichen Tests um Schülerinterviews. Letzteres wurde bereits bei der in Reiss, Klieme & Heinze (2001, 2002) beschriebenen Studie mit Abiturienten gemacht. Von den 81 Probanden wurden 26 ausgewählt, die vor laufender Kamera laut denkend Aufgaben zur Mittelstufengeometrie lösen sollten (Reiss & Thomas, 2000). Hier zeigten sich sehr deutlich die verschiedenen Schülerschwierigkeiten, die in der Regel nicht allein in Defiziten beim Faktenwissen begründet sind, sondern vor allem auch in den Schwierigkeiten, eigenständig mehrere Argumente zu einer Schlusskette zusammenzufügen:

> Auch bei erfolgreichen Problemlösern fällt der wenig systematisierte Umgang mit Hypothesen und Argumenten auf. Eine Exploration möglicher Argumentverknüpfungen wird eher selten geleistet. Insbesondere werden Argumente kaum auf Korrektheit geprüft. Nur wenige Probanden verknüpfen die wesentlichen Argumente einer korrekten Problemlösung zu einer vollständigen Argumentationskette. (Reiss & Thomas, 2000, S. 109).

Es lässt sich vermuten, dass diese Probleme auch bei den Aufgaben der höchsten Kompetenzstufe in Klasse 7 und 8 eine Rolle spielen. Während dies bei den leistungsstärkeren Probanden vermutlich das hauptsächliche Hindernis für eine erfolgreiche Aufgabenlösung ist, denn einschrittige Begründungsaufgaben der zweiten Kompetenzstufe werden noch zufrieden stellend gelöst, dürften bei den leistungsschwächeren Probanden noch weitere Defizite hinzukommen. Hier wären vor allem Lücken im Faktenwissen und das unzureichende Methodenwissen zum Beweisen zu vermuten. Die Ergebnisse einer Interviewstudie zur Methodenkompetenz beim mathematischen Beweisen mit 16 der 659 Probanden aus der oben erwähnten Untersuchung in Jahrgang 7/8 lassen sich ebenfalls in diesen Rahmen einfügen (Heinze & Reiss, 2003; Krell 2002). In dieser Studie sollten die Probanden, die inzwischen die 8. Klasse besuchten, laut denkend vorgegebene Schülerlösungen zu einer Beweisaufgabe beurteilen. Dabei wurden den Schülern zwei korrekte Beweise in unterschiedlicher Darstellung und zwei nicht korrekte Lösungen (empirische Argumentation, Zirkelschluss) vorgelegt. Hier zeigte sich, dass die häufigsten Probleme der Schüler einem Aspekt der Methodenkompetenz zugeordnet werden können, der in Heinze & Reiss (2003) als *proof structure* bezeichnet wird. Bei diesem Aspekt geht es im Wesentlichen um das Erkennen und die Evaluation der Beweisidee bzw. –strategie, d.h. eine Kette von mathematischen Argumenten muss als geeignet und zulässig für einen Beweis der vorgegebenen Behauptung erkannt werden.

3 Forschungsfragen und Design der Studie

Im Folgenden geht es schwerpunktmäßig um die Kompetenzen beim Beweisen und Begründen in der Geometrie in Jahrgang 8. Die Jahrgangsstufe 8 und auch bereits die Jahrgangsstufe 7 sind u.a. deshalb von besonderem Interesse, da zu dieser Zeit das mathematische Beweisen erstmals explizit behandelt wird.

3.1 Forschungsfragen

Aus den im vorherigen Abschnitt dargestellten Ergebnissen aus schriftlichen Tests lassen sich folgende Forschungsfragen zur Erklärung der Schülerschwierigkeiten bei Beweisaufgaben in Klasse 8 ableiten:

1. Worauf lassen sich die Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler in Klasse 8 beim Lösen von geometrischen Argumentations- und Beweisaufgaben im Wesentlichen zurückführen?
2. Gibt es bei diesen Schülerschwierigkeiten einen Unterschied zwischen leistungsstärkeren und leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern dahingehend, dass
    a. die leistungsstärkeren Probanden vor allem Probleme beim Verknüpfen einzelner Argumente zu einem Beweis haben und
    b. die leistungsschwächeren Probanden zusätzlich Defizite im Fakten- und Methodenwissen aufweisen?

Das Problem, mehrere Argumente zu einem Beweis zu verknüpfen, liegt häufig darin, dass die Schülerinnen und Schüler kaum Lösungsstrategien verfolgen, die über einen Argumentationsschritt hinausgehen. Wie schon im Zusammenhang mit der oben genannten Abiturientenstudie erwähnt, wird eine Exploration von Argumentverknüpfungen eher selten geleistet (Reiss & Thomas, 2000).

3.2 Auswahl der Probanden

Zur Untersuchung dieser Forschungsfragen wurden zehn Schülerinnen und Schüler ausgewählt, die bereits an der Studie von Reiss, Hellmich & Thomas (2002) beteiligt waren. Sie gehören zu der Gesamtstichprobe von 659 Probanden, die am Ende des Jahrgangs 7 an einem Geometrietest teilgenommen hatten. Die im Folgenden beschriebene Untersuchung wurde zum Halbjahr in Klasse 8 durchgeführt. Die Schülerinnen und Schüler hatten im Mathematikunterricht inzwischen eine Einheit zur Kongruenzgeometrie und dem Beweisen in der Geometrie durchgenommen. Die Auswahl der zehn Probanden erfolgte nur aufgrund der Schülerleistungen in dem Ende Klasse 7 durchgeführten Test (siehe Tabelle 1) und der freiwilligen Bereitschaft der Schüler. Es wurden je drei Schülerinnen und Schüler aus dem unteren und mittleren Leistungsdrittel und vier aus dem stärksten Leistungsdrittel interviewt.

Einige Zeit vor den Interviews wurden von der Gesamtstichprobe ein zweites Mal schriftliche Leistungsdaten in Form eines Geometrietests erhoben. Dabei wurden noch 529 Schülerinnen und Schüler erreicht. Diese Daten waren zum Zeitpunkt der Interviewführung allerdings noch nicht ausgewertet. Auch die Ergebnisse des zweiten Leistungstests zeigen bei Dichotomisierung gute Übereinstimmung mit dem einklassigen Rasch-Modell. Die Aufgaben lassen sich ebenfalls den drei Kompetenzstufen zuordnen, welche den gleichen Zusammenhang zu den Leistungsdritteln der Population zeigen wie der erste Test. Die Ergebnisse des zweiten Tests werden jetzt zusätzlich hinzugezogen, um die Probanden nach ihren Leistungen in Gruppen einzuteilen.

In Tabelle 1 auf der folgenden Seite sind die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler für die beiden Tests dargestellt. Die angegebenen Werte sind jeweils der gerundete prozentuale Anteil der erreichten Testpunkte. Der Durchschnittswert für die Gesamtstichprobe lag bei Test 1 bei 49% (12,7 von maximal 26 Punkten) und bei Test 2 bei 37% (11,9 von maximal 32 Punkten). Die Werte zu den Kompetenzstufen I, II bzw. III geben ebenfalls jeweils den Prozentanteil an den erreichten Punkten für die zugehörigen Items an. Zudem ist die Zuordnung der Probanden zu den Leistungsdritteln bei Test 1 und Test 2 angegeben (1=schwächstes, 3=stärkstes Leistungsdrittel) und schließlich die Einteilung in die zwei Leistungsgruppen für die hier beschriebene Interviewstudie.

3.3 Ablauf der Interviews

Die Probanden bekamen in den videografierten Interviews fünf Geometrieaufgaben vorgelegt, die bereits im zweiten schriftlichen Test verwendet wurden. Dieser Test lag allerdings bereits einige Wochen zurück. Die Testaufgaben waren den Lehrerinnen und Lehrern nicht ausgehändigt worden, sodass man davon ausgehen kann, dass sie im Unterricht auch nicht nachbehandelt wurden. Insgesamt ist der Widererkennungseffekt eher als gering einzuschätzen.

Die Probanden bearbeiteten die Aufgaben zunächst ohne Hilfe nacheinander. Bei Fragen wurde nur auf die vorhandenen Informationen verwiesen. Anschließend ging die Interviewerin die Aufgabenlösungen nacheinander noch einmal durch und befragte den Probanden nach unschlüssigen Lösungsschritten bzw. Problemen.

Tabelle 1: Schülerleistungen bei den zwei Testzeitpunkten[2]

Erreichte Testpunkte (%) der beteiligten Schülerinnen und Schüler	Florian	Dominik	Kirsten	Oliver	Marek	Stefan	Hendrik	Monika	Jan	Britta
Test 1 (M = 49%)	25	27	35	42	48	52	65	85	88	92
Test 2 (M = 37%)	28	41	39	27	45			63	59	53
Test 1:										
Kompetenzstufen I	46	42	25	67	88	63	75	75	83	100
Kompetenzstufen II	17	33	67	33	33	67	100	100	100	100
Kompetenzstufen III	0	0	25	13	0	25	25	88	88	75
Test 2:										
Kompetenzstufen I	50	75	71	29	46			92	92	83
Kompetenzstufen II	38	38	25	25	38			50	38	13
Kompetenzstufen III	0	08	17	25	50			42	42	50
Leistungsdrittel:										
Test 1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3
Test 2	1	2	2	1	3			3	3	3
Zuteilung zur Leistungsgruppe	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+

Die Interviews fanden in den jeweiligen Schulen während der Schulzeit statt. Interviewerin und Proband befanden sich alleine in einem separaten Raum. Videokamera und Mikrophon waren so positioniert, dass sie nicht unmittelbar im Blickfeld des Probanden waren. Zu Beginn erhielten die Probanden Informationen über den Ablauf des Interviews und die Aufgaben sowie Instruktionen zum Vorgehen. Diese Instruktionen, insbesondere die Aufforderung zum lauten Denken, wurden während des Interviews bei Bedarf wiederholt. Die Probanden waren natürlich auch aufgefordert, ihre Aufgabenlösungen aufzuschreiben. Allerdings verwendeten sie darauf nur wenig Mühe, was sicherlich in Zusammenhang mit der Betonung auf die mündlichen Erklärungen in den Interviews liegt. Die schriftlichen Lösungen werden im Folgenden auch nicht weiter beachtet. Die Videobänder wurden schließlich transkribiert und dann wie im Folgenden dargestellt ausgewertet.

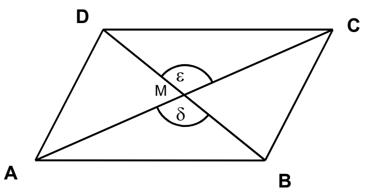
Von den fünf Geometrieaufgaben, die in den Interviews bearbeitet wurden, werden im Folgenden drei im Detail vorgestellt und die zugehörigen Schülerargumentationen in Kapitel 4 ausgewertet. Bei den beiden anderen Aufgaben handelt es sich zum einen um eine einfache Aufgabe der Kompetenzstufe I zum „Aufwärmen", die zu Beginn des Interviews bearbeitet wurde. In dieser Aufgabe sollten in einem gleichschenkligen Dreieck konkrete Winkelgrößen berechnet werden. Zum anderen geht es um eine komplexe, dreischrittige Aufgabe, in der mit Stufenwinkeln, gestrecktem Winkel und zuletzt mit einer Kombination der beiden ersten Schritte argumentiert werden musste. Die Ergebnisse zu dieser Aufgabe sind ähnlich denen der zweiten dreischrittigen Aufgabe mit der Thalesfigur und dem Inkreis, die unten vorgestellt wird. Aus Platzgründen wird hier auf die Präsentation der Interviewergebnisse zu diesen beiden Aufgaben verzichtet.

[2] Die beiden Schüler Stefan und Hendrik haben leider nicht am zweiten Test teilgenommen, sodass hier keine Ergebnisse vorliegen. Sie werden aufgrund ihrer guten Ergebnisse im ersten Test der stärkeren Leistungsgruppe zugeordnet.

Bei der ersten hier vorgestellten Aufgabe geht es um ein Viereck mit eingezeichneten Diagonalen und vorgegebenen Eigenschaften (Abbildung 1). Im ersten Teil sollte begründet werden, dass die Winkel δ und ε gleich

Abbildung 1: Interviewaufgabe 1

ABCD ist ein Viereck mit |MA|=|MC| und |MB|=|MD|.



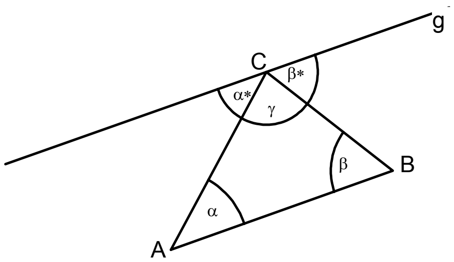
Begründe: (a) $\delta = \varepsilon$ (b) $|AB| = |CD|$

groß sind. Hier wurde erwartet, dass die Schülerinnen und Schüler δ und ε als Scheitelwinkel identifizieren. Im zweiten Teil war dann zu zeigen, dass die Seiten AB und CD kongruent sind. Dies konnte auf verschiedene Weisen gemacht werden, wobei aufgrund des vorhergegangen Unterrichts am ehesten der Kongruenzsatz SWS erwartet wurde. Das Aufgabenblatt war so gestaltet, dass nach jeder Teilaufgabe genügend Platz zum Schreiben war, Abbildung 1 gibt die Aufgabe aus Platzgründen nur in kompakter Form wieder (gleiches gilt für die beiden folgenden Aufgaben).

Bei der zweiten Aufgabe handelt es sich um einen Beweis, dass die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt (siehe Abbildung 2). Auch diese Aufgabe ist in zweite Schritte vorstrukturiert. Zunächst müssen die Wechselwinkelpaare α und α* bzw. β und β* erkannt werden. Anschließend kann mittels des gestreckten Winkels an g auf $\alpha^* + \gamma + \beta^* = 180°$ geschlossen und dann unter Einbeziehung der ersten Teilaufgabe die Behauptung gefolgert werden. Alternative Lösungen sind natürlich möglich. Der Beweis zur Winkelsumme im Dreieck gehört zum Standardstoff der siebten Klasse; er war in Form dieser Aufgabe Bestandteil von beiden Leistungstests, die vor diesen Interviews durchgeführt wurden. In beiden Tests zeigte sich, dass dieser Beweis für die Schülerinnen

Abbildung 2: Interviewaufgabe 2

In jedem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel 180°.

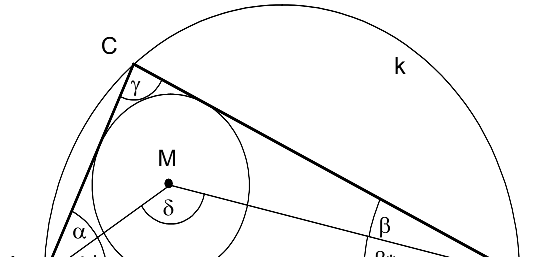


(a) Warum gilt $\alpha = \alpha^*$ und $\beta = \beta^*$, wenn g parallel zu $\overline{AB}$ ist?
(b) Begründe, dass die Winkelsumme der Innenwinkel im Dreieck 180° beträgt!

und Schüler trotz der Vorstrukturierung schwierig ist, wobei der erste Teil noch verhältnismäßig oft gelöst wurde.

Bei der dritten Aufgabe handelt es sich um eine dreischrittige Aufgabe, die an ein TIMS-Item angelehnt ist (Abbildung 3). Für diese Untersuchung wurde die ursprüngliche Multiple Choice-Aufgabe zu einer Beweisaufgabe umgewandelt. Wie oben schon kurz erwähnt, wird bei der ersten Teilaufgabe vermutet, dass die Probanden die Thalesfigur erkennen und die Behauptung mit dem Satz des Thales begründen. Bei der zweiten Teilaufgabe wird Bezug auf die Inkreiseigenschaften genommen. Auch wer nicht mehr genau weiß, welche besonderen Linien des Dreiecks sich im Mittelpunkt des Inkreises schneiden, erhält durch die zu beweisende Behauptung in Teil (b) einen Hinweis auf die Winkelhalbierenden. Im letzten Teil müssen unter Bezug auf die Winkelsumme im Dreieck (sowohl im Dreieck ABC als auch im Dreieck AMB), die Ergebnisse der ersten beiden Teilaufgaben verknüpft werden.

Abbildung 3: Interviewaufgabe 3



$\overline{AB}$ ist der Durchmesser eines Halbkreises k, C ist ein beliebiger Punkt auf dem Halbkreis (verschieden von A und B), und M ist der Mittelpunkt des Inkreises von Dreieck ABC.
Begründe: (a) $\gamma = 90°$ (b) $\alpha = \alpha^*$ und $\beta = \beta^*$ (c) $\delta = 135°$

4 Ergebnisse

Im Folgenden werden die Aufgabenlösungen der einzelnen Schülerinnen und Schüler vorgestellt und eingeordnet. Die Probanden wurden wie oben dargestellt in zwei Leistungsgruppen eingeteilt. Die detaillierten Leistungsergebnisse wurden bereits in Tabelle 1 dargestellt.

4.1 Schwächere Leistungsgruppe

Zur schwächeren Leistungsgruppe gehören vier Probanden (Florian, Dominik, Kirsten und Oliver). In den beiden schriftlichen Tests zeigten sie jeweils nur bei Aufgaben der Kompetenzstufe I einigermaßen akzeptable Leistungen (vgl. Tabelle 1). Während Kirsten und Oliver auch noch bei Aufgaben der höchsten Kompetenzstufe einige Punkte erreichten, zeigten Florian und Dominik hier sehr schwache Ergebnisse. Auffällig ist, dass Kirsten im ersten Test sehr stark bei Aufgaben der Kompetenzstufe II abschneidet und Oliver im zweiten Test bei Aufgaben der untersten Kompetenzstufe sehr viel schwächer abschneidet als im ersten Test.

4.1.1 Florian

Bei der ersten Aufgabe operierte Florian mit Anschauungsargumenten und folgerte so die erste Behauptung $\varepsilon = \delta$: "*Da diese beiden Dreiecke gleich groß sind, sind diese Winkel gleich groß*" und weiter

> *Weil die Dreiecke AMD und MBC gleich groß sind und die Winkel δ und ε auch gleich groß sind, müssen die Strecken AB und CD auch gleich groß sein.*

Auf Nachfrage führt er noch einmal explizit aus, dass man ja sieht, dass die Winkel δ und ε gleich groß sind. Dass die beiden Winkel Scheitelwinkel zueinander sind, erkennt Florian auch auf Nachfrage nicht, obwohl er später angibt, den Begriff schon gehört zu haben. Die Frage, ob er den zweiten Teil der Aufgabe auch mit einem Kongruenzsatz beweisen kann, begegnet er mit einer korrekten Lösung durch den Kongruenzsatz SWS.

Bei der Aufgabe zur Winkelsumme im Dreieck löst Florian den ersten Teil korrekt, bezeichnet die Wechselwinkel zuerst allerdings als Stufenwinkel. Auf Nachfrage korrigiert er dies später. Beim zweiten Teil hat er keine Idee. Auf die Frage nach weiteren Informationen aus der Zeichnung erkennt er den gestreckten Winkel und meint, man könne γ berechnen, wenn man die anderen beiden Winkel kennt.

Bei der dritten Aufgabe fehlt Florian das Wissen über den Satz des Thales. Er kann den ersten Teil somit nicht lösen. Beim zweiten Teil argumentiert er, dass der Winkel bei A geteilt wird, da die Strecke AM durch den Mittelpunkt M geht. Auf Nachfrage bezeichnet er AM als Mittelsenkrechte und auf nochmaliges Nachfragen schließlich als Winkelhalbierende. Den Zusammenhang zum Inkreis kennt er nicht. Die dritte Teilaufgabe überfordert Florian. Obwohl er einen Hinweis auf die Winkelsumme im großen und kleinen Dreieck bekommt, kann er die bereits vorliegenden Fakten über die Winkelgrößen nicht zu einer Schlussfolgerung zusammenfügen.

4.1.2 Dominik

Bei der ersten Aufgabe erklärt Dominik, dass die beiden Dreiecke AMB und CMD kongruent sind, weil jeweils zwei Seiten gleich lang sind:

> *ABCD ist ein Viereck mit MA = MC und MB = MD.* (…) (Interviewerin fordert zum lauten Denken auf) *MA = MC, MB ist gleich… - das heißt, das* (zeigt auf Punkt M) *muss die Mitte sein von dieser und von dieser Strecke* (zeigt auf AC und BD). *Dann heißt das, dass die Dreiecke* (ABM und CMD) *kongruent sein müssen. Das heißt, dass die Winkel* (δ und ε) *gleich sein müssen.* (…) *AB = CD* (…)*, ja…* (…) *das ist dann ja eigentlich auch ja auch, weil die kongruent sind – die Dreiecke.*

Auf Nachfrage, ob zwei kongruente Seiten für die Kongruenz von Dreiecken ausreichen, erklärt Dominik, dass auch der eingeschlossene Winkel gleich sein muss und dies würde ja in Teil (a) stehen. Eine Begründung für $\delta = \varepsilon$ weiß er nicht, die Bezeichnung Scheitelwinkel hat er aber schon gehört. Auf die Frage, warum die Betrachtung von zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel für die Kongruenz zweier Dreiecke ausreicht, nennt er korrekt den Kongruenzsatz SWS.

Bei dem ersten Teil der zweiten Aufgabe erkennt Dominik korrekt die Wechselwinkel. Beim zweiten Teil argumentiert er mit der Winkelsumme im Viereck, die im Falle des Dreiecks halbiert werden muss[3]. Auf Nachfrage, welche Informationen er über die Winkel in der Figur hat, nennt er die Wechselwinkel $\alpha^* = \alpha$ und $\beta^* = \beta$, den gestreckten Winkel $\alpha^* + \gamma + \beta^* = 180°$ und die Winkelsumme im Dreieck $\alpha + \gamma + \beta = 180°$. Die Frage, ob dies denn zur Begründung der Behauptung ausreicht, sagt er: "*Nee, ich weiß nicht, wie ich das begründen soll, dass in einem Dreieck 180° sind.*" Obwohl er alle Argumente genannt hat und diese nur noch verknüpfen braucht, antwortet er auch auf nochmaliger Frage nach einer Begründung mit „*Ich weiß nicht*."

Bei der dritten Aufgabe hat Dominik bei allen drei Teilaufgaben keine Idee. Den Mittelpunkt des Inkreises bezeichnet er als Mittelpunkt des Dreiecks. Die Nachfrage, ob ihm die Figur bekannt vorkommt, verneint er. Den Satz des Thales hat er schon mal gehört: „*Irgendwas – die Winkelsumme im Dreieck glaub ich, weiß nicht, irgendwas mit Dreiecken hat der gesagt.*" Über die Konstruktion des Inkreis weiß Dominik ebenfalls nichts, er kann auch keine Vermutung im Zusammenhang mit der Behauptung $\alpha^* = \alpha$ und $\beta^* = \beta$ aufstellen.

4.1.3 Kirsten

Kirsten erkennt bei der ersten Aufgabe korrekt, dass die Winkel δ und ε Scheitelwinkel sind. Für die Kongruenz der Seiten AB und CD nennt sie eine Begründung, die auf der Anschauung basiert: „*Die müssen gleich sein, weil es ein Parallelogramm ist.*" Und auf spätere Nachfrage „*Weiß nicht, irgendwie habe ich das – das sieht man doch einfach. Ich habe das einfach gesehen und weil diese hier* (Winkel δ und ε) *ja auch gleich sind.*" Nach Hinweisen auf die Dreiecke hat Kirsten die Idee der Kongruenz, die sie abbildungsgeometrisch begründen will: „*Ja also, so verkehrt rum gespiegelt.* (…) *das wird dann ja eigentlich so gedreht oder verschoben so rum.*" Allerdings kommt sie über vage Andeutungen, die auf der Anschauung basieren, nicht hinaus. Auf einen Hinweis zu einem möglichen Ansatz über Kongruenzsätze entgegnet sie: „*Nee, das weiß ich gar nicht!*"

Bei der Winkelsumme im Dreieck begründet Kirsten $\alpha^* = \alpha$ und $\beta^* = \beta$ zunächst damit, dass es sich bei den Winkeln um Stufenwinkel handelt. Auf Nachfrage korrigiert sie dies sofort zu Wechselwinkeln. Bei dem zweiten Teil der Aufgabe ist sie hilflos. Auf den Hinweis zunächst Informationen zu sammeln, erkennt sie den Zusammenhang $\alpha^* + \gamma + \beta^* = 180°$, auch wenn der Begriff „gestreckter Winkel" nicht vorhanden ist, und löst die Aufgabe korrekt.

Bei der letzten Aufgabe begründet Kirsten $\gamma = 90°$ durch einen Zirkelschluss:

> *γ ist 90°. β+ α und γ müssen 180° ergeben. Dann muss α + β + γ= 180° sein. Dann sind γ gleich 90°. Das gibt 180° - 90°, das sind 90°. Dann müssen α + β = γ sein. Dann ist γ = 90°.*

Die Frage, ob ihr die Figur bekannt vorkommt, bejaht sie, den Satz des Thales kennt sie allerdings nicht. Auch bei der zweiten und dritten Teilaufgabe hat Kirsten keine Idee. Zu Eigenschaften des Inkreises kann sie auch auf Nachfrage nichts sagen. Mit dem Hinweis auf die Winkelhalbierenden dann aber die zweite Teilaufgabe lösen. Bei der dritten Teilaufgabe kann Kirsten auf Nachfrage alle relevanten Informationen aufzählen, aus den Fakten aber keinen Lösungsansatz ableiten:

Interviewerin: *Kommst du damit jetzt weiter, mit dem was du weißt? Was weißt du denn jetzt alles?*
Kirsten: *Ich weiß, dass die hier gleich sind, diese* (zeigt auf β^* und β) *und die hier* (zeigt auf α^* und α). *Das sind 90°* (zeigt auf γ). *Was weiß ich noch? Dass hier 180° drin sind und da auch* (zeigt auf die Dreiecke ABM und ABC). (…)
Interviewerin: *Kommst du nicht mit weiter?*
Kirsten: *Nein.*

4.1.4 Oliver

Bei der ersten Aufgabe setzt Oliver zu umfangreichen Erklärungen an, die im Endeffekt in der richtigen Idee münden:

> *Weil die Winkel – die beiden Winkel* (δ und ε) *gleich groß sind und die Strecken AD – nee, AM und* (…) *CM und DM und BM gleich lang sind, müssen die anderen Strecken* (AB und CD) *auch gleich lang sein.*

Allerdings fehlen Oliver die richtigen Begrifflichkeiten und Begründungen (Scheitelwinkel, Kongruenzsatz SWS):

> *Wo die beiden sich schneiden – wenn ich jetzt zwei Linien zieh und die sich schneiden, dann ist auf beiden Seiten der gleiche Winkel – aber ich weiß nicht, wie ich das sagen soll.*

Auch im Nachfrageteil kann er keine strukturierte Argumentation liefern, im Gegenteil er gerät durcheinander und folgert $\delta = \varepsilon$ aus der zu zeigenden Kongruenz der Dreiecke AMB und CMD. Es entsteht der Eindruck, dass Oliver nur mit Plausibilitätsargumenten arbeitet, die nicht in gelernter mathematischer Theorie wurzeln. Leider wurde nicht gezielt nach den Begriffen Scheitelwinkel bzw. Kongruenzsatz SWS gefragt.

Die zweite Aufgabe zur Winkelsumme im Dreieck bereitet Oliver große Schwierigkeiten. Im ersten Teil geht er von der Winkelsumme im Dreieck aus und argumentiert fälschlicherweise, dass aus $\alpha + \gamma + \beta = 180°$ und $\alpha^* + \gamma + \beta^* = 180°$ die zu beweisende Behauptung $\alpha^* = \alpha$ und $\beta^* = \beta$ folgt. Auch bei der zweiten Teilaufgabe setzt Oliver den Satz über die Winkelsumme im Dreieck voraus: „*Weil, wenn es weniger als 180° wäre, dann würde das Dreieck überhaupt nicht zusammenpassen. Es gibt kein Dreieck, was nicht 180° hat.*" Im Nachfrageteil wird deutlich, dass Oliver die Aufgabe bis zum Schluss nicht

[3] Die Argumentation ist aus mathematischer Sicht problematisch, da die Winkelsumme im Viereck im Unterricht über die Winkelsumme im Dreieck hergeleitet wird. Von Achtklässlern kann man diesen Überblick zwar nicht unbedingt erwartet, dennoch wurde nach einer Alternativlösung gefragt.

versteht. Er argumentiert immer wieder mit der zu beweisenden Behauptung und bestätigt dies auch auf Nachfrage. Den Begriff Wechselwinkel hat er schon einmal gehört, kann aber nichts mehr damit anfangen.

Bei der letzten Aufgabe argumentiert Oliver zunächst, dass $\gamma = 90°$, weil es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt. Auf Nachfrage, ob dies hier eine Begründung sei, antwortet er: *„Ist nur eine Begründung, dass einer der Winkel* (im Dreieck) *90° sein muss.*" Wie er darauf kommt, dass das Dreieck rechtwinklig ist, wird nicht deutlich. Den Satz des Thales hat Oliver schon einmal gehört, weiß aber nicht mehr, was dieser aussagt.

Die zweite Teilaufgabe löst Oliver problemlos, wobei er sagt, dass sich die Winkelhalbierenden im Mittelpunkt des Dreiecks treffen. Die Tatsache, dass $\delta = 135°$ ist, hält Oliver für einen Zufall. Er glaubt aber begründen zu können, dass es sich um ein stumpfwinkliges Dreieck handelt: „ (…) *und es ist ein stumpfwinkliges Dreieck, weil die Strecken AM und BM die Winkelhalbierenden von den Winkeln A und B sind.*" Er argumentiert weiter, dass man den Winkel α^* und die Seiten AM und AB bräuchte, um δ zu berechnen. Hinweise, dass die Winkelsumme im Dreieck helfen könnte, $\delta = 135°$ zu berechnen, bringen Oliver zu der Erkenntnis, dass $\alpha^* + \beta^* = 45°$ sein muss. Die Frage, ob $\gamma = 90°$ vielleicht weiterhelfen könnte, begegnet er mit *„Ja, wenn man noch AC und CB hat, dann ja.*" Wie zuvor scheinen seine Gedanken durch den Kongruenzsatz SWS geleitet zu sein.

4.1.5 Zusammenfassung

In der folgenden Tabelle 2 ist noch einmal ein Überblick über das Lösungsverhalten der vier Probanden der schwächeren Leistungsgruppe dargestellt. Die dargestellten Ergebnisse beziehen sich dabei nicht auf das, was die Probanden aufgeschrieben haben, sondern auf ihre mündliche Argumentation. Dabei wurde ein „+" vergeben, falls der entsprechende Aufgabenteil ohne wesentliche Hilfe gelöst werden konnte, d.h. auch wenn beispielsweise Kirsten Wechselwinkel zunächst als Stufenwinkel bezeichnet und sich auf Nachfrage sofort korrigiert, wurde der Aufgabenteil positiv bewertet. Ein „-" gab es, wenn ein Aufgabenteil gar nicht gelöst werden konnte. Die Einträge „auf Hinweis" bzw. „durch Hilfe" bedeutet, dass nachgefragt wurde bzw. relevante Informationen gegeben wurden.

Aus den Interviews der vier Probanden werden zwei Probleme deutlich. Zum einen gibt es Defizite im Faktenwissen. Grundlegenden Aussagen über Winkel, wie Scheitelwinkel und Wechselwinkel, sowie Aussagen wie der Satz des Thales oder der Zusammenhang des Inkreises zu den Winkelhalbierenden sind nicht unbedingt vorhanden. Andererseits sind Schwierigkeiten beim Aufbau einer Argumentationskette zu erkennen. Dies hängt vor allem damit zusammen, dass keine Beweisidee aufgebaut werden kann. Besonders deutlich wird dies beispielsweise bei der zweiten Aufgabe bei Dominik und der dritten Aufgabe bei Kirsten. Bei allen Probanden zeigen sich zwischenzeitlich auch Defizite im Methodenwissen. So wird bei einigen Aufgaben mit Anschauungsargumenten gearbeitet oder die Behauptung als Argument im Beweis verwendet. Florian und Dominik haben die Aufgabe 1 b aufgrund dieser Mängel zunächst falsch gelöst, obwohl sie auf Hinweis doch eine einigermaßen korrekte Argumentation liefern konnten.

4.2 Stärkere Leistungsgruppe

Zur stärkeren Leistungsgruppe gehören sechs Probanden (Marek, Stefan, Hendrik, Monika, Jan und Britta, vgl. Tabelle 1). Monika, Jan und Britta zeigten in beiden schriftlichen Tests überdurchschnittliche Leistungen, wobei Jan und Britta im zweiten Test relativ wenig Punkte bei Aufgaben der Kompetenzstufe II bekamen. Marek steigerte sich vom ersten zum zweiten Test vom mittleren zum stärksten Leistungsdrittel. Insbesondere bei Aufgaben der höchsten Kompetenzstufe zeigte er viel bessere Leistungen. Hendrik und Stefan nahmen wie schon erwähnt nicht am zweiten Test teil.

Tabelle 2: Ergebnisse der schwächeren Leistungsgruppe

	Florian	Dominik	Kirsten	Oliver
Aufg. 1 a	-	-	+	-
Aufg. 1 b	durch Hilfe	auf Hinweis	-	-
Bemerkung	argumentiert mit Anschauung	zuerst zirkuläre Argumentation	1b) argumentiert mit Anschauung, Beweisidee vorhanden	Beweisidee da, kann keine Argumentkette liefern
Aufg. 2 a	+	+	+	-
Aufg. 2 b	-	-	auf Hinweis	-
Bemerkung	2b) kann aus hinreichenden Fakten keine Argumentkette aufbauen, da Idee fehlt	2b) kann aus hinreichenden Fakten keine Argumentkette aufbauen, da Idee fehlt		Verständnisproblem, argumentiert mit Behauptung
Aufg. 3 a	-	-	-	-
Aufg. 3 b	-	-	durch Hilfe	+
Aufg. 3 c	-	-	-	-
Bemerkung	3c) kann aus hinreichenden Fakten keine Argumentkette aufbauen, da Idee fehlt		3c) kann aus hinreichenden Fakten keine Argumentkette aufbauen, da Idee fehlt	3c) kann aus hinreichenden Fakten keine Argumentkette aufbauen, da Idee fehlt

4.2.1 Marek

Bei der ersten Aufgabe geht Marek fälschlicherweise davon aus, dass ein Dreieck schon durch zwei Seiten bestimmt ist:

> *Es reicht ja in einem Dreieck, wenn man zwei Seiten hat, weil die dritte ergibt sich dann schon von selber und dadurch sind diese beiden Dreiecke* (AMD und BMC) *gleich groß und diese beiden hier auch* (DMC und AMB). (…) *Dadurch ist* $\delta = \varepsilon$. (…) *und dadurch ist* $DC = AB$.

Auf Nachfrage, wie man gegenüberliegende Winkel nennt, kann Marek nicht den Begriff Scheitelwinkel nennen. Bei den Eigenschaften von Scheitelwinkeln vermutet er, dass sie gleich groß sind. Die anschließende Frage, warum die Dreiecke CMD und AMB kongruent sind, begründet er sofort mit dem Kongruenzsatz SWS.

Bei dem ersten Teil der zweiten Aufgabe begründet Marek ähnlich wie Oliver nur, dass $\alpha + \beta = \alpha^* + \beta^*$, indem von der Aussage $\alpha^* + \gamma + \beta^* = 180°$ und der Winkelsumme im Dreieck ausgegangen wird. Beim zweiten Teil nennt er die Aussage, dass bei Vielecken pro Ecke 180° zur Winkelsumme hinzukommen. Den Begriff Wechselwinkel hat er schon einmal gehört, weiß aber nichts darüber. Der Begriff gestreckter Winkel ist ihm gar nicht geläufig.

Bei der letzten Aufgabe erklärt Marek sofort, dass der Inkreismittelpunkt der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist und löst die zweite Teilaufgabe. Weiter kommt er zunächst nicht. Den Satz des Thales hatte er schon mal gehört, weiß ihn aber nicht mehr.

Leider entfielen bei Marek bei den Aufgaben 2 b) und 3 c) aus Zeitgründen ausführlichere Nachfragen.

4.2.2 Stefan

Stefan löst die ersten beiden Aufgaben problemlos. Bei der ersten Aufgabe nennt er die Scheitelwinkel allerdings Schenkelwinkel, was er später korrigiert. Bei der zweiten Aufgabe übersieht er zunächst die zweite Teilaufgabe.

Bei der dritten Aufgabe erwähnt Stefan sofort den Satz des Thales, ist sich aber nicht klar, ob er tatsächlich passt, da der Mittelpunkt vom Thaleskreis nicht eingezeichnet ist:

> *Ich muss mal ein bisschen nachdenken – und zwar glaub ich, dass das nach dem Prinzip vom Satz des Thales glaub ich geht. Das muss aber durch den Mittelpunkt gehen.* (…) *Das lass ich erst mal aus.*

Auf die Nachfrage, was der Satz des Thales aussagt, nennt Stefan die korrekte Aussage und akzeptiert diese dann auch als Begründung. Bei der zweiten Teilaufgabe sieht er richtig den Bezug zum Inkreis, weiß aber nicht mehr, dass dieser durch die Winkelhalbierenden bestimmt ist. Nachdem er diese Information erhalten hat, löst er sofort $\alpha^* = \alpha$ und $\beta^* = \beta$. Bei der dritten Teilaufgabe setzt Stefan richtig an, indem er über die Winkelsumme im Dreieck AMB folgert, dass $\alpha^* + \beta^* = 45°$ zu zeigen ist. Hier kommt er aber nicht weiter.

4.2.3 Hendrik

Zur ersten Aufgabe stellt Hendrik erst einmal eine Reihe von Untersuchungen an, die er aber aufgrund fehlender Voraussetzungen jeweils wieder verwirft:

> *AB und CD sind gleich, weil* (…) *es Parallelen sind. Aber das ist ja nicht immer so. Deswegen kann man das hier nicht gleich sagen, weil hier oben nicht gesagt ist, dass das Parallelen sind* (…).

Schließlich verweist er im Falle $\delta = \varepsilon$ darauf, dass „*gegenüberliegende Winkel*" immer gleich groß sind. Auf Nachfrage fällt ihm der zugehörige Begriff Scheitelwinkel nicht ein. Bei der zweiten Teilaufgabe argumentiert er über eine Punktspiegelung, die er auf Nachfrage korrekt erläutert.

Bei der Winkelsumme im Dreieck erkennt Hendrik sofort die Wechselwinkelpaare α^* und α bzw. β^* und β. Bei der zweiten Teilaufgabe, in der zu zeigen ist, dass die Winkelsumme immer 180° beträgt, argumentiert er ähnlich wie Oliver, dass kein Dreieck entstehen kann, wenn es mehr als 180° sind. Auf die Frage, ob man das auch im Zusammenhang mit der ersten Teilaufgabe beweisen kann, liefert Hendrik eine korrekte Lösung, weiß allerdings nicht, wie er sie aufschreiben soll.

Von der dritten Aufgabe löst Hendrik sofort die zweite Teilaufgabe, da er die Inkreiseigenschaften kennt. Weiter kommt er nicht. Auf Nachfrage, sagt er, dass er den Satz des Thales schon gehört hat, kann ihn aber nicht nennen. Bei der dritten Teilaufgabe erkennt Hendrik, dass es ausreicht $\alpha^* + \beta^* = 45°$ zu zeigen. Er meint aber, dass er die konkreten Größen von α^* und β^* braucht um weiterzurechnen.

4.2.4 Monika

Bei der ersten Aufgabe erkennt Monika sowohl die Scheitelwinkel als auch die Kongruenz der Dreiecke. Allerdings bezeichnet sie den Kongruenzsatz mit SSW. Auch vergisst sie den letzten Schritt $AB = CD$ hinzuschreiben.

Bei der Aufgabe zur Winkelsumme im Dreieck erkennt Monika die beiden Wechselwinkelpaare. Bei der zweiten Teilaufgabe schreibt sie unter Berufung auf $\alpha^* = \alpha$ und $\beta^* = \beta$, dass man α, β und γ auf eine „*Gerade abbilden kann*" bzw. dass „*sie zusammen einen gestreckten Winkel ergeben.*"

Bei der letzten Aufgabe hat sie trotz intensiver Überlegungen keine Idee, obwohl sie im Falle der dritten Teilaufgabe schon die richtige Beziehung zwischen den ersten beiden Teilaufgaben erkannt hat. Auf Nachfrage, ob ihr die Figur bekannt vorkommt, erwähnt sie den Satz des Thales und erklärt dessen Aussage korrekt. Ihr war nicht klar, dass dies als Lösung ausreicht. Auf die Frage nach Eigenschaften des Inkreises erwähnt sie die Winkelhalbierenden und löst sofort die zweite Teilaufgabe. Auch die dritte Teilaufgabe löst Monika, nachdem die Interviewerin bereits erwähnte Fakten noch einmal wiederholt hat.

4.2.4 Jan

Bei der ersten Aufgabe argumentiert Jan zunächst über eine Parallelogrammeigenschaft:

> *Ja, der Mittelpunkt ist auf der Mitte der Diagonalen. Deswegen ist das ein Parallelogramm und alle Seiten beim Parallelogramm sind ja parallel, wie der Name schon sagt.*

Jan folgert, dass damit die Strecken AB und CD gleich lang sind. Zusätzlich betrachtet er noch die beiden Dreiecke AMB und CMD, kann aber nicht nachweisen, dass sie kongruent sind, da er die Scheitelwinkel δ und ε nicht beachtet. Ohne Äußerung des Interviewers fällt ihm im Nachfrageteil des Interviews sofort auf, dass er die erste Teilaufgabe nicht bearbeitet hat. Er erkennt sofort die Scheitelwinkel und begründet mit ihrer Hilfe auch die Kongruenz der beiden Dreiecke AMB und CMD über den Kongruenzsatz SWS.

Bei der Aufgabe zur Winkelsumme im Dreieck erkennt Jan sofort die Wechselwinkelpaare α^* und α bzw. β^* und β. Die zweite Teilaufgabe begründet er mit der Winkelsumme im Viereck. Nach einem Hinweis auf die Zeichnung erläutert Jan ohne weitere Hilfe, dass $\alpha^* + \gamma + \beta^* = 180°$ gilt und damit auch $\alpha + \gamma + \beta = 180°$ folgt.

Bei der dritten Aufgabe glaubt Jan sich an die Figur zu erinnern, kann die erste Teilaufgabe ($\gamma = 90°$) aber nicht lösen. Dafür kennt er die Eigenschaften des Inkreises und löst problemlos die zweite Teilaufgabe. Unter Verwendung der ersten beiden Teilergebnisse gelingt es ihm sogar die dritte Teilaufgabe zu lösen, indem er korrekt $\delta = 135°$ folgert. Die Nachfrage nach dem Satz des Thales musste aus Zeitgründen leider entfallen.

4.2.5 Britta

Britta löst die erste Aufgabe problemlos, wobei sie nicht nur die verwendeten Aussagen begründet, sondern im Detail auch erklärt, welche Voraussetzungen beim Kongruenzsatz eingehen.

Bei der zweiten Aufgabe erkennt Britta sofort die Wechselwinkel und fährt fort:

> *$\alpha = \alpha^*$ und $\beta = \beta^*$ und wenn man $\alpha^* + \beta^* + \gamma$ zusammenrechnet, ergeben sie einen Halbkreis. Da ein Halbkreis 180° ist, Komma, sind – also ist ein Dreieck mit allen Winkeln zusammen 180°... groß? – kann ich das so schreiben?*

Auf spätere Nachfrage erläutert sie genauer, dass $\alpha^* + \beta^* = \alpha + \beta$ und deshalb die Behauptung folgt.

Bei der letzten Aufgabe überspringt Britta den ersten Teil, da ihr der Satz des Thales nicht mehr so geläufig ist. Auf Nachfrage, ob ihr die Figur bekannt vorkommt, wird aber deutlich, dass sie sich an die Aussage erinnert:

> *Ja, das hatten wir in der Schule. Ich komm nur nicht auf – wie das heißt.* (…) *wir hatten das so ausgerechnet, dass jedes – dass das immer 90° sind, weil die beiden unten ergeben so gesagt immer 90°, wenn man die zusammenrechnet.*

Britta kann die zweite Teilaufgabe problemlos lösen, da sie die Eigenschaften des Inkreises kennt. Auch zur dritten Teilaufgabe hat Britta eigentlich die korrekte Idee, sie verhaspelt sich allerdings und liefert eine leicht konfuse Lösung. Auf Nachfrage, ob sie es noch einmal erklären kann, liefert sie eine geordnete Lösung nach:

> *Die drei – also das – γ war ja 90°, also müssen die beiden unten 90° ergeben* (zeigt auf die Winkel bei A und B). *Aber da die ja die Winkelhalbierende ist* (zeigt auf AM und BM), *ergibt sich hier nur die Hälfte, so gesagt - 45° und das wäre – da wir noch einen Winkel oben haben – also δ - muss da ja noch 45° zugezählt werden, weil sonst wäre das zu wenig. Ein Dreieck hat ja 180°.*

4.2.6 Zusammenfassung

In Tabelle 3 ist ein Überblick über das Lösungsverhalten der sechs Probanden aus der stärkeren Leistungsgruppe dargestellt. Die Bedeutung der verschiedenen Einträge ist analog zu Tabelle 2 gewählt.

Aus Tabelle 3 wird deutlich, dass die Ergebnisse dieser Probanden wie erwartet besser ausfallen als in der schwächeren Leistungsgruppe. Aber auch diese stärkere Gruppe ist nicht homogen. Wie schon bei den schriftlichen Tests (siehe Tabelle 1) gibt es Unterschiede bei den Aufgabenlösungen.

Auffällig ist beispielsweise, dass Marek deutlich schwächer ist als die anderen Probanden. Dieses liegt sowohl am Faktenwissen (Scheitelwinkel, Wechselwinkel, Satz des Thales), als auch an dem Problem, Lösungsansätze zu finden und Argumente zusammenzufügen. Bei dem Beweis zur Winkelsumme im Dreieck geht er von der Behauptung aus. Marek ist aber der einzige in dieser Gruppe, bei dem bezüglich des Methodenwissens zum

Tabelle 3: Ergebnisse der stärkeren Leistungsgruppe

	Marek	Stefan	Hendrik	Monika	Jan	Britta
Aufg. 1 a	-	+	+	+	+	+
Aufg. 1 b	auf Hinweis	+	+	+	+	+
Bemerkung			1b) über Punktspiegelung			
Aufg. 2 a	-	+	+	+	+	+
Aufg. 2 b	-	+	auf Hinweis	+	+	+
Bemerkung	argumentiert mit Behauptung; 2b) leider nicht nachgefragt					
Aufg. 3 a	-	+	-	+	-	auf Hinweis
Aufg. 3 b	+	durch Hilfe	+	auf Hinweis	+	+
Aufg. 3 c	-	-	-	durch Hilfe	+	+
Bemerkung	3c) leider nicht weiter nachgefragt	3c) kann aus hinreichenden Fakten keine Argumentkette aufbauen, da Idee fehlt	3c) kann aus hinreichenden Fakten keine Argumentkette aufbauen, da Idee fehlt		3a) leider nicht nachgefragt	3a) Aussage bekannt, Name „Satz des Thales“ nicht mehr

Beweisen noch Probleme erkennbar sind.

Stefan und Hendrik haben vor allem bei der komplexen dritten Aufgabe Schwierigkeiten. Bei der Aufgabe 3c haben beide alle notwendigen Information zusammen und beginnen mit dem richtigen Ansatz. Sie erkennen aber nicht, wie sie die anderen Fakten zu einer Argumentationskette zusammenfügen können. Monika, Jan und Britta gehören wie auch schon bei den schriftlichen Tests zur Spitzengruppe. Sie lösen die meisten Aufgaben problemlos. Bei Schwierigkeiten können sie mit Hinweisen eine korrekte Lösung erreichen.

5 Diskussion

Die im vorherigen Abschnitt dargestellten Ergebnisse der Interviews zeigen zunächst einmal, dass einige Schülerinnen und Schüler im Detail mehr können, als durch schriftliche Leistungstests abgebildet wird. Dies ist im Wesentlichen auf das unterschiedliche methodische Vorgehen von Interviews und schriftlichen Tests zurückzuführen, da die Probanden im Interview die Möglichkeit haben, auf Hinweise bzw. durch Hilfen eine korrekte Aufgabenlösung zustande zu bringen. Zudem standen in diesem Fall nicht die schriftlichen Lösungen, sondern „nur“ die mündliche Argumentation im Vordergrund, wodurch das korrekte Aufschreiben der Lösung als mögliche Fehlerquelle entfiel. Vergleicht man allerdings die einzelnen Schülerleistungen im Interview (Tabelle 2 und 3) mit den nach Kompetenzstufen ausdifferenzierten Leistungen in den schriftlichen Tests (Tabelle 1), so zeigt sich bei den betrachteten zehn Probanden, dass die Schülerleistungen in Relation zueinander durch die schriftlichen Tests doch in etwa widergespiegelt werden. Allerdings geben die schriftlichen Tests kaum Informationen über die einzelnen Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler wieder.

Wie aus dem vorherigen Abschnitt 4 hervorgeht, sind es unterschiedliche Gründe, die ein erfolgreiches Bearbeiten der Aufgaben bzw. manchmal sogar schon von Teilproblemen verhindern. Es zeigt sich, dass bei den schwächeren Schülerinnen und Schülern eine Kombination aus Lücken im Faktenwissen und im Methodenwissen vorhanden ist. Dazu gehören einerseits so elementare Fakten wie beispielsweise die Eigenschaften von Scheitelwinkel, die auch auf Nachfrage nicht genannt werden können. Andererseits fehlt einigen Probanden im Bereich des Methodenwissens u.a. die Kenntnis, dass in einer mathematischen Begründung nicht auf Anschauungsbasis argumentiert werden darf (vgl. Tabelle 2). Hinzu kommen die Schwierigkeiten, Argumente zu einer Schlusskette zu verknüpfen. Dies kann teilweise auch dann nicht geleistet werden, wenn alle Informationen für die Aufgabenlösung, z.T. sogar schon in der richtigen Reihenfolge vorliegen (z.B. Dominik bei Aufgabe 2b oder Kirsten bei Aufgabe 3c).

Bei der stärkeren Leistungsgruppe traten mit einer Ausnahme (Marek) keine Probleme mit dem Methodenwissen und kaum Lücken im Faktenwissen auf (vgl. Tabelle 3). Es zeigte sich, dass die starken Schülerinnen und Schüler (Monika, Jan und Britta), die bereits bei beiden schriftlichen Tests zum stärksten Leistungsdrittel gehörten, auch mit dem Aufbau einer Beweisidee und dem Verknüpfen von Argumenten kaum Schwierigkeiten hatten. Bei Hendrik und Stefan, die nach ihren schriftlichen Testergebnissen bei Aufgaben der höchsten Kompetenzstufe eher zum mittleren Leistungsdrittel tendierten, zeigten sich Schwächen bei dem Aufbau von Argumentationsketten. Sie konnten keine Beweisstrategie entwickeln, die für sie eine Anleitung zur Verknüpfung der vorhandenen Argumente dargestellt hätte.

Insgesamt können die in Abschnitt 3.1 aufgestellten Forschungsfragen damit beantwortet werden. Wie schon bei anderen Studien wurde deutlich, dass das Faktenwissen und unabhängig davon das Methodenwissen maßgeblichen Einfluss auf die Schülerkompetenzen beim Beweisen haben (vgl. Abschnitt 2). Defizite weisen hier vor allem die leistungsschwächeren Probanden auf. Zudem zeigte sich, dass die Schülerinnen und Schüler zusätzlich die Fähigkeit benötigen, einerseits eine Beweisidee zu entwickeln und andererseits anhand dieser Idee durch eine Verknüpfung der relevanten Informationen eine Argumentationskette als Begründung bzw. Beweis aufzubauen. Probleme zeigten sich hier sowohl bei schwächeren als auch bei stärkeren Probanden. Die Schwierigkeit dürfte in diesem Bereich vor allem in den unterschiedlichen Vorgehensweisen in den beiden Schritten liegen, die auch schon in dem erwähnten Phasenmodell von Boero genannt werden: Die Entwicklung einer Beweisidee zeichnet sich dadurch aus, dass in einer Explorationsphase sowohl auf empirischer und intuitiver Basis als auch auf Grundlage von Plausibilitätsargumenten zunächst eine grobe Beweisstrategie aufgebaut wird. Dieser Strategie muss in einem zweiten Schritt nachgegangen werden, indem nun aber nur noch mathematisch zulässige Argumente zu einer Schlusskette verknüpft werden. Voraussetzung ist dazu allerdings, dass die möglichen Argumente bzw. Fakten erkannt werden bzw. bekannt sind und dass genügend Kenntnisse über die Struktur eines mathematischen Beweises da sind. Verständnisschwierigkeiten im letztgenannten Bereich zeigt beispielsweise Oliver bei Aufgabe 2b. Für ihn steht fest, dass die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt („*Es gibt kein Dreieck, was nicht 180° hat.*“), entsprechend argumentiert er bis zum Schluss mit der zu beweisenden Behauptung.

Interessant ist die Tatsache, dass einige schwächere Probanden durchaus auf empirisch-intuitiver Basis bzw. durch Plausibilitätsargumente eine Beweisstrategie entwickeln. Kirsten erwähnt bei der ersten Aufgabe, dass die beiden Dreiecke AMB und CMD in dem Viereck durch Kongruenzabbildungen aufeinander abgebildet werden können: „*Ja also, so verkehrt rum gespiegelt. (...) das wird dann ja eigentlich so gedreht oder verschoben so rum.*“ Diese Idee, die sie (nach einem Hinweis auf die Dreiecke) auf Basis der Anschauung entwickelt, kann sie aber wahrscheinlich aufgrund mangelnden Faktenwissens nicht weiterverfolgen. Auch Oliver entwickelt bei der Aufgabe 1 aufgrund von Plausibilitätsargumenten eine Strategie, die Grundlage für eine erfolgreiche Aufgabenlösung sein könnte:

> *Weil die Winkel – die beiden Winkel* (δ und ε) *gleich groß sind und die Strecken AD – nee, AM und* (…) *CM und DM und BM gleich lang sind, müssen die anderen Strecken* (AB und CD) *auch gleich lang sein.*

Allerdings wird auch bei ihm das Problem deutlich, dass er die einzelnen Schritte in seiner Beweisidee nicht durch mathematische Argumente belegen kann.

An dieser Stelle sind zwei Punkte von besonderem Interesse. Zum einen die Frage, wie viel Wert beim Beweisen im Mathematikunterricht auf den Aufbau einer Beweisstrategie und das anschließenden Absichern dieser Strategie durch Argumentverknüpfungen gelegt wird bzw. inwieweit dieses Vorgehen explizit erläutert wird. Ergebnisse einer Videostudie mit 22 Unterrichtsstunden zum Beweisen in der Geometrie in Klasse 8 weisen in die Richtung, dass dieser Punkt eher vernachlässigt wird (vgl. Heinze & Reiss, 2004). Häufig wird nach dem empirischen Auffinden einer Aussage (z.B. durch Nachmessen in einer geometrischen Figur) die Behauptung notiert und dann mit Hilfe des Lehrers schrittweise ein Beweis erarbeitet. Letzteres geschieht durch ein sukzessives Abarbeiten von Teilproblemen, deren Lösungen jeweils auch gleich notiert werden. Vorüberlegungen zu einer globalen Beweisstrategie, die auf Plausibilitätsargumenten oder empirischen Feststellungen beruht, werden eher selten geleistet. Auch ein Rückblick nach Fertigstellung des Beweises, d.h. ein Zusammenführen der vielen bearbeiteten Teilschritte, kommt kaum vor.

Die andere Frage ist, wie man die Fähigkeit, eine Beweisstrategie zu entwickeln und anschließend anhand von Argumentverknüpfungen abzusichern, auch bei den Schülerinnen und Schülern mit lückenhaftem Faktenwissen trainieren kann. Natürlich ist die Frage zu stellen, ob dies überhaupt Sinn macht, denn ohne ausreichende Faktenkenntnisse nützt beim Lösen von Beweisaufgaben auch oben genannte Fähigkeit nichts. Allerdings muss man sich umgekehrt dem Problem stellen, dass ein Üben dieser Fähigkeit durch die übliche Bearbeitung von Beweisen im Unterricht an den Lernenden mit Lücken im Faktenwissen in weiten Teilen vorbei geht. Betrachtet man die Ergebnisse verschiedener Untersuchungen (vgl. Abschnitt 2), so betrifft dies einen nicht geringen Anteil von Schülerinnen und Schülern, die somit noch weiter zurückgeworfen werden.

Ein denkbarer Ausweg wäre, zunächst Beweisaufgaben so zu behandeln, dass das notwendige Faktenwissen wiederholt oder aufgefrischt wird. Damit wird für schwächere Schüler erst einmal eine Basis geschaffen, welche die Strategie des eigenständigen Entwickelns einer Beweisidee und das anschließende Verknüpfen von Argumenten zu einer Schlusskette nachvollziehbar macht. Eine Möglichkeit könnten etwa heuristische Lösungsbeispiele bieten (Reiss & Renkl, 2002), die in Form von aufbereiteten Arbeitsblättern ein Bearbeiten in Einzel- oder Partnerarbeit erlaubt. In einer laufenden Testphase wird dies derzeit erprobt.

6 Literatur

Baumert, J.; Lehmann, R. u. a. (1997): TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich

Blum, W.; Kirsch, A. (1991): Preformal proving: examples and reflections. Educational Studies in Mathematics 22 (2), 183 - 203

Blum, W.; Neubrand, M. (Hrsg.) (1998): TIMSS und der Mathematikunterricht. Informationen, Analysen und Konsequenzen. Hannover: Schroedel

Boero, P. (1999): Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 7/8

Deutsches PISA-Konsortium (2001): *PISA 2000: Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich.* Opladen: Leske + Budrich

Hanna, G.; Jahnke, H. N. (1996): Proof and proving. In: A. J. Bishop; K. Clements; C. Keitel; J. Kilpatrick; C. Laborde (Eds.) International handbook of mathematics education. Vol. 4. Pt. 2. Dordrecht: Kluwer, 877 - 908

Harel, G.; Sowder, L. (1998): Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In: A. H. Schoenfeld; J. Kaput; E. Dubinsky (Eds.) Research in Collegiate Mathematics Education III. Providence, RI: American Mathematical Society, 234 – 283

Healy, L.; Hoyles, C. (1998): Justifying and Proving in School Mathematics. Technical report on the nationwide survey. Institute of Education, University of London

Heintz, B. (2000): Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin. Wien: Springer

Heinze, A.; Reiss, K. (2002): Dialoge in Klagenfurt II – Perspektiven empirischer Forschung zum Beweisen, Begründen und Argumentieren im Mathematikunterricht. In: W. Peschek (Ed.), Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 227 – 230

Heinze, A.; Reiss, K. (2003): Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. In: M. A. Mariotti (Ed.), International Newsletter of Proof, No. 4-6/2003

Heinze, A. & Reiss, K. (2004): The teaching of proof at lower secondary level – a video study. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), 36(3), pp. 98 – 104

Knipping, C.; Krummheuer, G.; Dreyfus, T. (2002). Dialoge in Klagenfurt I – Perspektiven empirischer Forschung zum Beweisen, Begründen und Argumentieren im Mathematikunterricht. In W. Peschek (Ed.), Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 271 – 274

Krell, K. (2002): Methodenkompetenz im Bereich des Beweisens und Begründens in der Geometrie. Hausarbeit zum 1. Staatsexamen. Carl von Ossietzky-Universität Oldenburg

Lin, F. L. (2000): Investigating local learning issues in mathematics education from international perspective. Keynote Speech on the Second International Conference on Science, Mathematics and Technology Education, 10.-13.1.2000, Taipeh (Taiwan)

Manin, Y. (1977): A Course in Mathematical Logic. New York: Springer

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.) (2000): Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM

Reiss, K.; Klieme, E.; Heinze, A. (2001): Prerequisities for the understanding of proofs in the geometry classroom. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Hrsg.), Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4. Utrecht: Utrecht University, 97-104

Reiss, K.; Heinze, A.; Klieme, E. (2002): Argumentation, proof, and the understanding of proof. In H. G. Weigand; A. Peter-Koop; N. Neill; K. Reiss; G. Törner; B. Wollring (Eds.), Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries. Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Potsdam, 2000. Hildesheim: Franzbecker, 109 – 120.

Reiss, K.; Hellmich, F.; Thomas, J. (2002): Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht. In M. Prenzel; J. Doll (Hrsg.), Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen. 45. Beiheft der Zeitschrift für Pädagogik. Weinheim: Beltz, 51-64

Reiss, K.; Renkl, A. (2002): Learning to prove: the idea of heuristic examples. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 34 (1); 29-35

Reiss, K.; Thomas, J. (2000): Wissenschaftliches Denken beim Beweisen in der Geometrie. Ergebnisse einer Studie mit Schülerinnen und Schülern der gymnasialen Oberstufe. Mathematica Didactica 23, 96-112

Stein, M. (1984): Beweisen. Bad Salzdetfurth: Franzbecker

Steinhöfel, W.; Reichold, K. (1971): Zur Behandlung mathematischer Sätze und ihrer Beweise im Mathematikunterricht. Mathematik in der Schule, 11, 707 – 711

de Villiers, M. (1990): The role and function of proof in mathematics. Pythagoras, 24, 17-24

Wittmann, E. C.; Müller, G. (1988): Wann ist ein Beweis ein Beweis. In P. Bender (Hrsg.) Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter. Berlin: Cornelsen, 237-257

Autor

Heinze, Aiso, Dr., Lehrstuhl für Mathematikdidaktik, Universität Augsburg, Universitätsstraße, 86159 Augsburg, Germany
Email: aiso.heinze@math.uni-augsburg.de