

Hans-Wolfgang Henn:

Elementare Geometrie und Algebra – Basiswissen für Studium und Mathe- matikunterricht

Mit Online-Service zum Buch

Wiesbaden: Friedr. Vieweg Verlag/GWV Fachverlage
GmbH 2003; VIII+213 S.; ISBN 3-528-03201-4

Lutz Führer, Frankfurt am Main

ZDM-Classification: H10; E10, F40, G40/50

In einem sehr dichten Vorwort gibt Hans-Wolfgang Henn einige Hinweise zur Intention und zur Zielgruppe des Buches. Gemeint sei gewissermaßen eine „Elementarschule“ für junge Studierende der Mathematik, die einige grundlegende Sätze und Zusammenhänge der Geometrie, Arithmetik und Algebra so darstellen soll, dass nicht der stringente Aufbau irgendwelcher Theorien dominiert, sondern der Wunsch, „die Mathematik soll als ein harmonisches Ganzes erscheinen, das mehr ist als eine Summe von Einzeldisziplinen“. Ein „stimmiges Bild von Mathematik“ (Henn nach Stroth) und eine zwei-dimensional vernetzte Übersicht sollen dem Studienanfänger geboten werden, spiralig aufsteigend, mit Querverbindungen nach den Seiten, historisch angereichert, fundiert, aber nicht dauernd mit Beweisen befrachtet und verwirrt. In jedes Kapitel sind einige Aufgaben in loser Folge eingestreut. Lösungshinweise und zusätzliche Materialien werden dem Leser auf der Verlags-Homepage angeboten.

Was sind nun die Themen, aus denen das versprochene Bild von Mathematik entstehen soll, und welches Bild ist gemeint, wem kann es wofür nützen? Diesen Fragen soll in den folgenden drei Abschnitten nachgegangen werden.

1. Inhalte des Buches

Noch im Vorwort erklärt der Autor freimütig, Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte“ habe ihm als Vorbild vor Augen gestanden, und er zitiert beifällig den Meister mit den schönen Worten:

„Ich habe mich bemüht, dem Lehrer – oder auch dem reiferen Studenten – Inhalt und Grundlegung der im Unterricht zu behandelnden Gebiete vom Standpunkte der heutigen Wissenschaft in möglichst einfacher und anregender Weise überzeugend darzulegen.“

Henn fügt dem hier nur hinzu, seine eigene Darstellung setze eine mathematische Grundbildung von etwa zwei Semestern voraus. Später zeigt sich, dass der Leser besser auch ein wenig an Darstellungsweisen der Hochschulalgebra gewöhnt sein sollte.

Die Orientierung an Klein ist nun keineswegs nur stilistisch wirksam, sondern auch inhaltlich, denn die fünf Kapitel behandeln Themen, die auch Klein für lehrerbil-

dend gehalten hat, wohl auch für harmonisierbar, aber keinesfalls als ausreichend für ein „stimmiges Bild“ damaliger Mathematik – dazu unten, im nächsten Kapitel dieser Besprechung, mehr.

Die fünf Kapitel heißen: 1. Zu den Grundlagen der Geometrie, 2. Geometrische Konstruktionen, 3. Symmetriegruppen, 4. Algebraische Gleichungen einer Variablen, 5. Der Aufbau des Zahlensystems: Von den natürlichen zu den komplexen Zahlen.

Diese Überschriften verraten schon dreierlei: Zum einen ist der Autor von Herzen klassischer Algebraiker, dem sich „die“ Geometrie stimmigerweise zu unterwerfen hat. Zum zweiten geht es um sehr alte Hüte in freundlich modernisiertem Gewand. Und zum dritten handelt es sich um Stoffe, die in der üblichen Gymnasiallehrerbildung, die einige Semester im Schlepptau der Diplom-Studierenden stattfindet, eher randständig sind und demnach wohl von den praktizierenden Mathematikdozenten nicht für allzu charakteristisch, typisch und/oder fruchtbar für „die heutige Mathematik“ gehalten werden. Die gewählten Themen werden aber an Hochschulen ausnahmslos und gern – aus welcher erfindlichen und unerfindlichen Gründen auch immer – Mathematikspezialisten unter Studierenden für „niedere“ Lehramter als „grundlegend“ angedient, vgl. etwa Scheids „Elemente ...“ und neuere Erscheinungen in den einschlägigen Spektrum-Serien. Auf die rechten Zielgruppen für das vorliegende Buch komme ich noch am Ende dieser Besprechung zurück.

Es wäre nun zweifellos Buch und Autor gegenüber ungerrecht, wollte man es bei diesen eher skeptischen Eindrücken belassen. Herr Henn kennt sich nämlich in den gewählten Themenbereichen glänzend aus, und er kommentiert das Gebrachte stets mehr oder minder ausgiebig in sehr angenehm lesbarem Stil. Manche Verkürzungen oder holzschnittartige Globalisierungen sollten nicht zu streng beurteilt werden, schließlich geht es dem Autor um Anfänger, denen er Mut machen möchte, Elemente der (geometrisch kontextuierten) Algebra in einem historischen und sachlichen Zusammenhang zu denken. Das ist – auch für Gymnasialstudierende – kein triviales Unterfangen, und die Chancen für ein Gelingen hängen natürlich außer vom Stil auch von Tiefgang und Umfang der Stoffauswahl ab.

Ich finde, in dieser Hinsicht hat Herr Henn gute Kompromisse gefunden (beim Folgenden haben mir Henns kurze Kapitel-Vorschauen sehr geholfen):

1.1 Das erste Kapitel, Grundlagen der Geometrie,

beginnt mit einem historischen Überblick von Euklid über Hilbert bis Klein, deren Axiomensysteme bzw. Klassifikationsidee ausschnittsweise besprochen wird. Bachmanns Spiegelungsgeometrie wird kurz erwähnt, Riemann wird erst auf S. 192 bei den komplexen Zahlen wegen der Riemannschen Flächen erwähnt, Vektoren kommen im nächsten Kapitel unter Bewegungsgruppen vor, Topologie nur als topologischer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, Raumtheorie und Differentialgeometrie gar nicht. Dafür geht die zweite Hälfte von Kapitel 1 mehr ins Detail: „Als konkretes Beispiel für den streng axiomatischen Aufbau einer geometrischen Theorie wird ausführlich ein einfacher und übersichtlicher Spezialfall, die Theorie der affinen Ebenen, behandelt.“

1.2 Das zweite Kapitel, Geometrische Konstruktionen, behandelt klassische Konstruktionsaufgaben (mit Zirkel und Lineal) bis zum Konstruktionsproblem für regelmäßige n -Ecke. Natürlich kommen einige traditionsreiche Geschichtchen um die berühmten unlösbaren Aufgaben zum Zuge. Dann werden knapp und übersichtlich die Konstruktionsbedingung mit Ketten von Körpererweiterungen hergeleitet, auf einige antike Probleme angewandt und – nach einem kurzen Bericht über die Kreisquadratur – zum Höhepunkt in Form des Gaußschen Satzes über die Konstruierbarkeit regulärer n -Ecke geführt. Den Schluss des Kapitels bildet, bis auf ein paar Bemerkungen zum 7- und zum 17-Eck, ein schöner Abschnitt über das reguläre Fünfeck samt Goldenem Schnitt. Besonders hat mir an diesem Kapitel gefallen, dass zwischendurch einige nichttriviale Papierfaltkonstruktionen und der Quadratrix-Zirkel besprochen werden.

1.3 Das dritte Kapitel, Symmetriegruppen,

zielt darauf, „ebene und räumliche Objekte gemäß dem Erlanger Programm von Felix Klein nach ihren Symmetrien geordnet und klassifiziert“ zu bekommen. „Die Untersuchung konkreter Objekte auf ihre Symmetrien hin kann schon sehr früh in der Schule...“ (S. 63, nicht S. 61 wie im Inhaltsverzeichnis versprochen)

Ich, der Rezensent, erlaube mir an dieser Stelle einen ganz *persönlichen Einwurf*, weil ich Symmetrie als eigenes Thema in der Schule regelmäßig höchst langweilig fand. Irgendwie klingt das Klassifikationsanliegen in meinen Ohren sehr bürokratisch: Nun beklebt mal ordentliche Schubladen für alles, was ihr habt, und schaut ja nach, dass ihr keine Objektsorte vergessen habt. Zur Erleichterung dürft ihr verschiedene Objekte eines Symmetrietyps in dieselbe Schublade tun, auch wenn sie ganz verschieden „sind“ (aussehen), die Mathematiker machen's eben auch so. Seit Jahren warte ich darauf, dass jemand für Mathematikeinsteiger eine humanere Begründung und Motivation erfindet (in der Physik gibt es sie schon lange). Herr Henn brauchte sie nicht zu suchen, weil er ja Mathematikstudenten voraussetzt, und die sind halt per se motiviert...

Im Kapitel 3 geht es los mit den Isometrien von Ebene und Anschauungsraum, die in üblicher Weise auf Spiegelungen zurückgeführt werden. Dann werden die Symmetriegruppen regulärer Polygone und die Drehgruppen einiger Polyeder, auch von Prismen, bestimmt, wobei unterwegs Platon, Kepler und Eulers Polyedersatz zu Ehren kommen, obwohl die mit Gruppen gar nichts zu tun hatten. Wirklich schön, und das ahnt man schon beim Blättern wegen der wunderbaren Schwarzweißbilder, sind die zentralen knapp 40 Seiten des Kapitels, auf denen der Autor die Symmetriegruppen von Band- und Flächenornamenten sorgfältig und liebevoll abhandelt. Am Ende gibt es dann noch zwei lesenswerte Abschnitte über die Kachelkollektion von Roesemary Grazebrook und natürlich über Penrose-Parkette.

1.4 Das vierte Kapitel, algebraische Gleichungen,

behandelt die Auflösbarkeit durch Radikale, ausgehend von Cardano-Ferraris Resultaten über den dritten und vierten Grad, die nach ein paar historischen Anmerkungen trickreich vom Himmel fallen. Nach einigen Bemerkungen über „elementare Methoden“, nämlich über Lösungsschranken, rationale Lösungen, euklid. Algorithmus für Polynome und die Methode von Sturm, folgen die beiden zentralen Abschnitte, die den Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Gleichungen höheren Grades gemäß Galoistheorie sowie mehrere Beweise für den Fundamentalsatz der Algebra skizzieren.

ungen über „elementare Methoden“, nämlich über Lösungsschranken, rationale Lösungen, euklid. Algorithmus für Polynome und die Methode von Sturm, folgen die beiden zentralen Abschnitte, die den Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Gleichungen höheren Grades gemäß Galoistheorie sowie mehrere Beweise für den Fundamentalsatz der Algebra skizzieren.

1.5 Das fünfte Kapitel, Aufbau des Zahlensystems...,

geht in der üblichen Schrittfolge und mit einigem Name-dropping von den natürlichen über die ganzen, rationalen und reellen (C-Folgen-) Zahlen zu den komplexen. Lokkere Leitideen sind Hankels Permanenzprinzip und die kardinale Hierarchie des Unendlichen nach Cantors Abzählverfahren. Den Abschluss bildet denn auch ein längerer Abschnitt über „das Cantorsche Diskontinuum und andere Fraktale“. Über transzendente Zahlen gibt es nur eine kurze Bemerkung auf S. 184 bzgl. π und e (mit Querverweisen auf Bemerkungen in Kap. 2 zur Nichtkonstruierbarkeit von π). Da die algebraischen Zahlen abzählbar sind, aber im ganzen Buch sonst die Hauptrolle spielen, finde ich das schade. Dass der Sprung von \mathbb{Q} nach \mathbb{R} eine topologische und keine algebraische Angelegenheit ist, und dass es oberhalb der komplexen Zahlen, evtl auch noch der Quaternionen und Cayley-Oktaven mit dem „Zahlbegriff“ gar nicht mehr vernünftig weiter geht, wäre vielleicht auch schön zu bemerken. Vielleicht hätte Herr Henn wenigstens Liouvilles Erstkonstruktion konkreter transzendenter Zahlen erläutern sollen, um wenigstens einen ersten Begriff von der überabzählbaren Zahlenvielfalt oberhalb \mathbb{Q} zu vermitteln. Ich vermisse auch die Fortsetzung des zweiten Cantorschen Diagonalverfahrens zur Erzeugung höherer Mächtigkeiten – wenn schon Diagonalverfahren als Leitidee, denn schon richtig „voll krass“!

2. Welches Bild von Mathematik wird vermittelt?

Man kann es schon auf der ersten Seite des 1. Kapitels ahnen, sobald man Sätze liest wie

„Aus der Denkweise Euklids hat sich die heutige Auffassung mathematischen Denkens entwickelt. Unter Verzicht auf die Anschauung kommt man allein mit logischen Schlüssen aus Grundannahmen zu neuem mathematischen Wissen.“ So macht „man“ es eben, Motive, Geldgeber und Intuitionen spielen in „der“ Mathematik keine Rolle, nur geniale Ideen und ewige Wahrheiten. Oder?

Die Inhaltsskizzen in den vorigen Abschnitten belegen es dann detaillierter: Es geht um ein Bild von Mathematik, das seine Substanz aus der Algebra des 19. Jahrhunderts und seine elegante Form in der ersten Hälfte des 20. Jhs. von Artin, Noether und Bourbaki bezogen hat. Angewandte Analysis und Diskrete Mathematik, erst recht Stochastik passen (jenseits von Würfelbuden und Ziegenställen) nicht recht dazu, nicht einmal die synthetisch-morphologische Elementargeometrie des 19. Jhs., die von Computeranimatoren gerade wieder entdeckt wird. Es ist, in formalistischer Darstellung und autoritär dem Buch schon vorausgesetzt (2 Semester Mathe!), ein Teil ziemlich genau des Bildes, das Felix Klein vor hundert Jahren von den Grundlagen der Mathematik hatte, die alle Gymnasiallehrer der Mathematik lernen sollten. Aber Klein

verlangte immerhin auch „funktionales Denken“, „Fusion von Algebra und (Raum-)Geometrie“ (nicht kreuzförmige „Vernetzung“!) und einiges an „Approximationsmathematik“.

Fundamentalsatz der Algebra, Galoistheorie und Erlanger Programm sind nicht die Nabel der heutigen mathematischen Welt. Und sie waren es auch sehr wahrscheinlich zu Kleins Zeiten nicht. So etwas kommt im vorliegenden Buch, das Mathematik als logisch-algebraischen Exerzierplatz und als gottgewollte Mengenkonstruktions- und -klassifikationsaufgabe ausgibt, nicht vor. Es würde ja auch die explizit verkündete Harmonie der Mathematik als Ganzes stören, die mehr als „eine Summe von Einzeldisziplinen“ scheinen soll. (In meinen Augen ist sie nicht mehr als eine solche Summe, sondern Anderes, nämlich etwas Lebendiges mit vorübergehend markanten Ausstülpungen. Aber wir wollen hier nicht über Metaphern streiten.)

Die historischen Zuschreibungen zwischendurch und die freundlichen Vorschauen, Zwischenbemerkungen und Kommentare dienen eigentlich – wie die Beweiseinsparungen – nur dazu, aufzulockern, dem Leser Atempausen zu verschaffen. Sie verraten selten etwas über die einst oder heute zugrunde liegenden Erkenntnismotive, Zwecke, Funktionen und/oder Genesen des locker-formal präsentierten Fertigwissens. Das hier gepriesene Bild von Mathematik wird im Verlaufe des Buches auch nicht entwickelt, sondern Schritt für Schritt enthüllt, erklärt, übermittelt. Mathematisch handelnde, ins Unreine denkende, streitende, zweifelnde oder gar irrende Subjekte kommen in diesem Bild nicht vor, nicht einmal unter den toten Heroen der Mathematik, die scharenweise angeführt und abgelichtet werden.

Das ist freundlich-klarer, sozusagen mit Auslassungen und Schmankerln verdaulich gemachter, „informeller“ Formalismus, aber im Kern ein gnadenlos Mensch und Welt „abgewandter“ Formalismus, dem Hilbert nicht lange und die Bourbakis laut deren Vorwort nie gehuldigt haben. Es erstaunt schon, Derartiges von einem Didaktik-Professor zu lesen, der doch eigentlich Realitäts- und Sinnbezüge, vielleicht nicht „ontologische“, aber „Geltungsbindung“, wie es Marian Heitger einst nannte, achten müsste und der sich als Didaktiker immer sehr für Anwendungsbezüge und psychologisch-genetische Zugänge eingesetzt hat. Ich finde ältere Bilder von Mathematik, wie sie Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte“ oder Courant/Robbins' „Was ist Mathematik?“ entworfen haben, nicht nur tiefer und breiter durchdacht, sondern auch im Anspruch bescheidener und sogar moderner – von Davis/Hersh, Hörmander, Steen oder Ian Stewart ganz zu schweigen.

3. Wem kann das Buch wozu nützen?

Henns Buch wirkt auf mich wie der Text einer sorgfältig illustrierten und um Zusammenschauen bemühten Überblicksvorlesung für Lehramtler zu den Anfängen der vor siebzig Jahren „Modernen Algebra“. Damit sind auch schon die beiden Lesergruppen angedeutet, die das Buch sicher mit Gewinn lesen können: Einerseits Dozenten der angesprochenen mathematischen Grundgebiete, andererseits Studierende, die sich auf „die“ moderne Algebra der

Artins einlassen wollen oder müssen und einen vorläufigen Überblick zu Quellen und Stil des Unternehmens haben möchten. Lehramtsstudierenden empfehle ich das Buch nur zur fachlichen Ergänzung. Als Einführungen in die angesprochenen Teilgebiete scheinen mir für diese Klientel neben Courant/Robbins die Mathematikgeschichten von Struik, Tropfke, Scholz und Wussing sowie die behutsamen Sacheinführungen in der Enzyklopedie der Elementarmathematik von Alexandroff, Chintchin u. a. besser geeignet, weil sie nicht nur Stoff, sondern auch Erkenntniswege und -interessen skizzieren.

Autor:

Prof. Dr. Lutz Führer
 Institut für Didaktik der Mathematik der Goethe-Universität
 Senckenberganlage 9
 60054 Frankfurt am Main
fuehrer@math.uni-frankfurt.de