

## Y a-t-il lieu d'envisager des Mathématiques Post-modernes ? <sup>1</sup>

Nicolas Bouleau, Paris (France)

**Abstract:** In order to give a right place to modeling as a major connexion of mathematics to economic activities, we emphasize the contrast between modern mathematics and polysemic mathematics. The philosophies of Popper and Quine are opposed in accordance to the light they bring to modeling. That point of view leads to see modeling as talking a language with the three syntactical, semantical and pragmatical components. This reinforces the importance of teaching the critic of modeling and the critic by non conformist modeling.

**ZDM-Classification:** A40, M10

Mon propos porte essentiellement sur les *mathématiques appliquées* ou *mathématiques mixtes* suivant l'expression de Francis Bacon au début du dix-septième siècle.

A ceci plusieurs raisons, d'abord à cause de leur importance pour les débouchés des élèves mais surtout parce que la problématique philosophique qui m'intéresse ici prend toute sa force et ses enjeux lorsqu'on regarde l'usage social de la science et l'influence de l'économie et du développement informatique sur la nature des connaissances et leur perfectionnement.

D'une certaine façon on comprend assez bien aujourd'hui ce que sont les mathématiques pures. C'est toujours objet de débats philosophiques bien sûr, mais les travaux des logiciens contemporains, puisant des enseignements de ce très riche vingtième siècle, ont débouché sur l'image assez parlante du mathématicien fabricant de sens, interpréteur et conducteur de combinaisons complexes, qui est tirée de la correspondance de Curry-Howard et que Jean-Louis Krivine a résumé du terme de *mathématicien-décompilateur*. Ce n'est pas mon intention d'exposer ni de discuter ces vues ici, mais je suis frappé, en revanche, du peu de travaux philosophiques, psychologiques ou sociologiques sur les mathématiques appliquées. Déjà cette expression de mathématiques appliquées, qui, si l'on y prête attention, est assez curieuse, est rarement remise en cause sérieusement.

### 1. L'ère de la modélisation

Dès qu'on aborde la question : à quoi servent les mathématiques, la scène philosophique est encombrée par un sentiment, une émotion, une mystique quasi-religieuse exprimée par l'apophtegme de Galilée que "le livre de la nature est écrit en caractères mathématiques". Bien sûr on peut être émerveillé que les planètes tournent, en

première approximation, sur des ellipses en suivant la loi des aires, que les raies d'absorption des atomes soient proportionnelles à des inverses de carrés de nombres entiers et soient les valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint, etc., etc. Il est enthousiasmant qu'en faisant des mathématiques pures on puisse dégager des idées qui éclairent notre lecture de la nature, mais ce n'est pas là le seul processus, loin de là.

On peut même considérer que ce terme de *science appliquée* est la survivance d'une doctrine philosophique très typée, très située historiquement, très optimiste aussi sur le rôle des connaissances objectives et universelles pour améliorer les affaires humaines que depuis le dix-neuvième siècle on appelle le *modernisme*. Si on reste dans l'abstrait, on échappe difficilement à ces ornières de pensée initiées par Galilée et dans lesquelles on est passé et repassé ensuite. Aussi je prendrai quelques exemples qui conduiront le débat vers des registres moins convenus.

Dans la seconde moitié du dix-neuvième siècle l'ingénieur dispose de mathématiques conceptuellement très avancées pour calculer les ouvrages, les pièces de machine, les effets thermiques et électriques, mais il ne sait résoudre les problèmes numériquement que dans des configurations géométriques particulières, avec des fonctions spéciales et des changements de variables astucieux. Au vingtième siècle grâce à la notion d'espace de Hilbert, et plus généralement d'espaces fonctionnels, les fonctions sont traitées comme des points avec des coordonnées et l'ingénieur sait construire pour tous les problèmes de la physique des algorithmes de résolution qui, grâce à l'informatique, ont été banalisés sous la forme de programmes aux éléments finis. On ne cherche plus tant une formule explicite qui a le droit de figurer dans le livre de la nature, qu'un procédé effectif et approché de résolution d'une situation quelconque. D'un point de vue philosophique la beauté s'est déplacée. Elle réside maintenant dans la généralité et la puissance *du langage* (ici de l'analyse fonctionnelle) dont dispose l'ingénieur.

Autre exemple dans les années 1930, la théorie de l'information de Claude Shannon et la théorie des processus stationnaires du second ordre de Norbert Wiener conduisent à un enrichissement langagier qui ouvre une pluralité de procédures opérationnelles en traitement du signal. Les rapports à la technique se modifient pour la fabrication de dispositifs de filtrage des bruits, d'automatismes de régulation et donc des compétences et des métiers apparaissent fondés sur ces nouvelles "sciences de l'ingénieur". On pourrait citer de même le calcul stochastique dans la seconde moitié du vingtième siècle.

Avec le développement prodigieux de l'informatique durant ces dernières décennies, ces nouvelles possibilités langagières se traduisent, et nous avons là un phénomène historique majeur, par de nouvelles capacités à agir. On entre dans *l'ère de la modélisation*. Celle-ci ne se limite pas à la mise en œuvre rapide de représentations ou d'algorithmes puisés dans le corpus mathématique. Non, elle modifie profondément la nature même des pratiques sociales dans les champs les plus divers.

Regardons plus au détail l'exemple du génie des

<sup>1</sup> Plusieurs éléments de cette conférence donnée à Grenoble EM2000 sont tirés des ouvrages suivants : N. Bouleau, *Philosophies des mathématiques, du chercheur à l'ingénieur*, L'Harmattan, 1999; N. Bouleau, "La modélisation et les sciences de l'ingénieur", in *Enquête sur le concept de modèle*, Sous la dir. de Pascal Nouvel, PUF 2002.

matériaux. Il est une illustration parfaite du double mouvement dans lequel est prise l'innovation : entre la recherche d'une part et la demande d'autre part, cette dernière s'exprimant de nos jours au travers de l'économie de marché.

*D'un côté les laboratoires proposent de nouveaux matériaux.* Ils sont proches des établissements d'enseignement supérieur et disposent de savoirs théoriques. Par application de certains effets physiques, de nouvelles synthèses chimiques ou encore par la mise en œuvre de certains appareillages, ils fournissent des corps dont les caractéristiques sont inhabituelles.

*D'un autre côté l'industrie s'appuyant sur le marché,* attend la solution de problèmes mal résolus. On peut dire que la science fournit des solutions en attente de problèmes alors que la technique pose des problèmes en attente de solutions<sup>2</sup>.

Il est incontestable que l'apparition d'un matériau aux propriétés nouvelles, tel que la recherche est capable d'en produire, un gel de silice par exemple, viendra modifier le jeu des questions et des réponses dans l'évolution technique. Ainsi ce double mouvement est une dialectique nécessaire de l'innovation, il prend du temps. Des matériaux peuvent dormir plus de dix ans sur les étagères des laboratoires sans participer à un processus de développement industriel. Les cristaux liquides sont restés longtemps des curiosités avant qu'on en fasse des thermomètres chromatiques et des affichages de montres puis d'ordinateurs.

*La modélisation se révèle un outil de dialogue et un langage prospectif.*

Les laboratoires, en plus d'expériences matérielles qui restent, par nature, limitées à un choix de températures, de concentrations et autres caractéristiques, élaborent des modèles des matériaux étudiés. Ces modèles sont simplement des écritures informatiques de représentations mathématiques des propriétés des corps conformes aux lois physiques, simplifiant certains aspects afin que les résolutions se déroulent assez rapidement pour qu'on puisse observer les réponses du "matériau" aux actions qu'on lui fait subir. L'avantage d'un tel modèle est qu'on peut maintenant faire varier les paramètres, les proportions des mélanges, les températures de changement de phase, les lois rhéologiques, voir même pourquoi pas les constantes physiques. On est alors dans la fiction pure, mais parmi ces corps imaginés dont certaines propriétés sont hypertrophiées, l'industriel peut déceler des idées pour aller au-devant de la demande. On a une piste, un dialogue s'instaure, les chercheurs et les entreprises peuvent envisager des étapes dans l'investigation, solliciter des aides publiques pour les atteindre...

Les laboratoires universitaires sont dotés maintenant de puissants moyens informatiques et l'activité de modélisation y est devenue prépondérante, elle est essentiellement mathématique : résolution de problèmes

physiques sous forme d'équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires, simulation probabiliste et méthode de Monte-Carlo, usage de fonctions de base adaptées au problème (splines, ondelettes). Cette mathématique est mise en œuvre surtout par des physiciens, des chimistes et autres praticiens.

Si nous considérons l'effet de serre et le changement global et plus généralement, les démarches quantitatives et symboliques pour aider la décision collective en matière d'environnement, d'études d'impact, etc., ce qui apparaît partout en matière de modélisation, c'est que les mathématiques n'interviennent plus, ni comme le pensait Galilée ni comme se l'imaginaient les modernes. Les savoirs ne descendent plus de la théorie vers le monde. La situation est presque retournée : les hommes, les entreprises, les lobbies agissent en se servant au mieux de leurs intérêts de langages hybrides partiellement formalisés qui s'enracinent plus ou moins dans les connaissances objectives pour élaborer des dossiers les plus convaincants possibles auprès de leurs clients, ou des actionnaires ou des autorités.

La situation actuelle reste complexe à déchiffrer et déroutante à bien des égards, notamment dans le domaine des mathématiques financières par exemple. La façon de penser des trente glorieuses est révolue. Je voudrais rappeler à ce sujet une anecdote que beaucoup d'entre vous connaissent certainement.

Elle est révélatrice de cette période hautaine où il était hors de doute que les constructions théoriques étaient les plus importantes et les plus intéressantes, quel que soit le contexte économique et culturel. C'est l'affaire de la "bibliothèque de mathématiques pour le tiers-monde". En 1982 l'Union mathématique internationale (IMU) annonça un programme, sous l'égide de l'UNESCO, "pour aider, je cite, les pays en développement à démarrer la constitution de bibliothèques en mathématiques pures et appliquées, et en informatique, gardant à l'esprit les difficultés financières et le manque de spécialistes de ces diverses disciplines dans ces pays". Pour ce faire, on demanda à Jean Dieudonné d'élaborer une liste d'ouvrages destinée à être complétée ensuite par d'autres mathématiciens de renom. Le choix de Jean Dieudonné ne surprendra pas, sa vaste culture était mondialement connue. Il avait été la cheville ouvrière du traité de Bourbaki dont la gloire n'avait pas encore décliné. La liste proposée par Jean Dieudonné, une centaine de titres en première urgence et trois cents en deuxième urgence, reflète assez son *Panorama des mathématiques pures* (1977) et n'aborde pas les probabilités, l'analyse numérique ni l'informatique. Elle fut amendée, et complétée sur ces points, par une vingtaine de mathématiciens européens, américains, russes et japonais. Le résultat<sup>3</sup> est tout à fait impressionnant par la place prépondérante, quasi exclusive, faite à la haute théorie et aux ouvrages les plus abstraits d'accès difficile. L'esquisse de bibliothèque obtenue est totalement inadaptée aux moyens et aux besoins des pays en développement. Chaque livre cité nécessite une bonne dizaine de manuels plus élémentaires

<sup>2</sup> Remarquons, comme plusieurs auteurs et notamment Ulrich Beck, que la technique pose des problèmes avant et après l'innovation, car elle s'appuie sur un engouement commercial qui ignore les effets induits et n'a pas les moyens de les penser. Il y a là un nouvel appel à la connaissance, sous l'angle critique, aux enjeux plus importants encore.

<sup>3</sup> Publié dans la revue *Mathematics and development* (ICPAM), 1985, 1986.

et concrets pour que les étudiants puissent se familiariser avec le domaine.

L'erreur est précisément la même que celle des "maths modernes" dans les lycées et collèges qui avait fait des ravages dans les années 1960 et 70. Même démarche qui descend de la théorie vers les savoirs opérationnels sans les atteindre, privant les élèves de formation professionnelle sérieuse.

Ces intellectuels, alors que la décolonisation s'achevait, n'ont pas pris la peine d'envisager concrètement ce qui pourrait être utile aux étudiants d'Afrique, d'Amérique latine, du Moyen ou d'Extrême-Orient. Leur travail, soigneux, est un regard de la communauté mathématique sur sa propre production. Elle se donne en exemple, sans chercher plus loin.

On doit se demander, néanmoins, si la confusion n'est pas plus profonde : le discours scientifique, au moins dans cette période d'après-guerre, était considéré par les décideurs comme le seul langage de l'efficacité. Cette ambiguïté, ancienne et tenace, tire son origine des philosophes des Lumières qui, en réaction aux connaissances révélées et aux croyances surnaturelles, voyaient la science comme langage de la vérité. À leurs yeux, la science est un terrain neutre de description des faits et de leurs enchaînements, elle "renonce à chercher l'origine et la destination de l'univers, à connaître les causes intimes des phénomènes, pour s'attacher uniquement à découvrir par l'usage bien combiné du raisonnement et de l'observation leurs lois effectives, c'est-à-dire leur relation invariable de succession et de similitude"<sup>4</sup>. Mais nous devons noter que le positivisme va plus loin et n'hésite pas à faire de la science le cadre approprié pour mener au mieux les affaires humaines, une fois écartées "les métaphores prises pour des raisonnements" et établies "les règles générales convenables pour procéder sûrement à la recherche de la vérité". C'est un trait de la modernité de considérer que les exigences méthodologiques de la science sont non seulement compatibles avec l'avancée des connaissances mais sont la condition de leur progrès véritable à l'exclusion de toute autre forme de représentation ou de compréhension. Plus tard, à propos de l'exercice de la médecine, Claude Bernard sera partisan de limiter la thérapeutique aux seuls faits observables et leurs causes efficaces. Ainsi, au cours du dix-neuvième siècle, la science moderne, encouragée par le développement technique, ne se construit pas comme un recueil de représentations consensuelles minimales mais se prétend bien la seule vérité et le seul langage de l'efficacité.

Or cela est loin d'être évident. Il n'est pas sûr que les vertus requises pour la description du réel dans un effort de rationalité, d'objectivité et d'universalité, soient les mêmes qu'on puisse attendre d'un langage entre acteurs, partenaires ou adversaires, dans la complexité du jeu social. C'est cette question, à mon sens, qui nous sépare de la période moderne et ouvre la voie à des formes nouvelles de construction de connaissances. Et dès lors que de telles connaissances subjectives peuvent utiliser des mathématiques, celles-ci ne sont plus intrinsèquement

modernes, mais participent aux enjeux post-modernes, tout simplement en tant qu'éléments linguistiques de représentations sociales vécues et utiles.

Voici rapidement brossé le problème que je voudrais aborder, non pas en lui apportant une réponse mais en le développant sous plusieurs éclairages.

Je dirai d'abord quelques mots pour spécifier ou caractériser ce qu'on peut appeler les mathématiques modernes (2).

Puis j'évoquerai ce que peuvent être des mathématiques sujettes à une pluralité d'interprétations (3).

Je soulignerai l'opposition de deux philosophies celle de Quine et celle de Popper sous l'angle de la modélisation (4).

Enfin je parlerai de la modélisation comme langage : Que veut dire savoir parler avec les mathématiques ? (5).

J'évoquerai en conclusion l'activité critique vis-à-vis des modèles : l'importance de cette critique et qui peut la faire.

## 2. Mathématiques modernes

Pour spécifier ce qu'on peut appeler les mathématiques modernes il faudrait faire un panorama historique que je ne peux qu'évoquer ici. Il y a une période qui se dégage nettement du début du dix-neuvième siècle à la fin troisième quart du vingtième qui commence avec Gauss et Cauchy et s'achève avec Bourbaki encore que son achèvement justement est controversé et l'objet de notre discussion.

À cet égard, il me semble qu'on peut comprendre Bourbaki comme une réaction vis-à-vis de certaines tendances du début du siècle : Bourbaki dit d'une certaine façon "Ce qu'ont fait Whitehead et Russell avec les *Principia Mathematica* est sans intérêt, les fondements purement formels sont de peu d'utilité pour le mathématicien, nous allons vous montrer ce qu'il fallait faire pour construire vraiment les mathématiques".

Il y a une illusion dans l'autosatisfaction de Russell lorsqu'il dit "toute mathématique est logique [...] une des plus grandes découvertes de notre âge." (1903) Il faut 350 pages pour arriver à la définition du nombre 2 et s'il fallait aller plus loin, Whitehead et Russell, pour arriver aux problèmes intéressants, seraient bien obligés de se servir du sens fourni par l'histoire et le social, etc... Les découvertes des années 1930 sur l'effectivité ont montré encore plus clairement la confusion qu'il y a chez Russell entre les mathématiques possibles et les mathématiques actuelles, les seules qui nous intéressent.

Poincaré a vigoureusement lutté contre le logicisme (cf. *Science et Méthode* 1908). Ses idées ont certainement influencé Lautman qui sut reconnaître dès 1937 l'importance de ses méthodes qualitatives et qui donna, dans sa philosophie des mathématiques, une place privilégiée au concept en une ontologie nouvelle préfigurant le structuralisme et Bourbaki.

De Bourbaki je ne dirai que quelques mots car il a été abondamment commenté. Il y a dans ce mouvement trois aspects :

une philosophie des mathématiques sous-jacente proche du structuralisme lautmanien ;

une œuvre colossale dans la direction d'une grande synthèse ;

<sup>4</sup> A. Comte, *Cours de philosophie positive, première leçon*, 1830.

une dérive formaliste surtout le fait de Jean Dieudonné avec un fort souci unitaire et la volonté de trouver la bonne et vraie signification des notions afin que tout le monde les comprenne de la même manière.

Et puis il y a la caution plus ou moins implicite que le groupe Bourbaki a apporté à l'aventure des maths modernes dans les programmes scolaires. On peut considérer que les maths modernes dans les lycées et collèges des années 1960-70 sont une rénovation qui revient de Bourbaki en arrière vers Russell.

Le structuralisme ne pouvant s'appréhender aisément que dans les mathématiques supérieures, pour les programmes du secondaire on prend

- de Bourbaki le souci unitaire, ce qui tue toute velléité interprétative, imaginative chez les élèves

- de Russell la sémantique ensembliste et exclusivement cette sémantique pourtant très pauvre et très localisée.

Je renvoie aux livres d'André Revuz *Mathématique moderne mathématique vivante* 1963 qui écrit "un premier avantage de la mathématique moderne est de rendre son unité à une Science qui se dispersait. Les mathématiciens utilisent les mêmes concepts et le même langage dans toutes les branches : il est légitime de parler non plus des mathématiques mais de la mathématique". Je me souviendrai toujours, j'ai encore ses yeux égarés en mémoire, de ce fils de paysan du Lot, aîné des enfants d'une exploitation fermière modeste, en classe de troisième à qui, par bon voisinage, je donnais des leçons de révision et auquel il fallait que j'explique pourquoi une droite était "un ensemble de points sur lequel opère fidèlement et transitivement le groupe additif des réels", avant qu'il ne retourne s'occuper des étables et du séchage du tabac.

Aujourd'hui les problèmes pédagogiques ne sont plus les mêmes, il y a eu une évolution dans le bon sens au moins du point de vue de la nature des mathématiques, ce sont d'autres difficultés qui sont devenues préoccupantes.

### 3. Mathématiques sujettes à plusieurs interprétations

Une des caractéristiques de la doctrine des mathématiques modernes étant le souci unitaire, *que peuvent être des mathématiques sujettes à une pluralité d'interprétations ?*

Abandonner l'unité ne détériore pas les mathématiques au contraire cela les enrichit. C'est non seulement prendre le contre-pied du formalisme mais c'est récuser aussi le platonisme. Pour René Thom par exemple, les axiomatisations ne font qu'approcher les théories intuitives comme des cartes locales approchent une variété, alors que dans une vision polysémique des mathématiques ce sont les intuitions qui sont partielles et qui fournissent des éclairages à la complexité des situations rencontrées.

Si l'on y prête sérieusement attention l'intuition est *locale*. Il ne faut pas s'illusionner par idéalisme : une bonne intuition, comme une lampe, n'éclaire bien qu'une partie de la forêt. Lorsque Lagrange interprète la tangente à une courbe comme une droite la coupant en deux points confondus, il ouvre des voies nouvelles vers la géométrie algébrique, mais cette définition de la tangente ne s'étend pas aux courbes qui ne sont pas analytiques. Lorsque l'on

interprète les probabilités par des masses positives, cette analogie mécanique permet de penser l'espérance comme un centre de gravité, ramène la méthode statistique de l'analyse en composantes principales à la recherche d'axes d'inertie, et permet d'établir facilement certaines inégalités, mais on n'arrivera pas à interpréter ainsi l'indépendance.

La théorie du potentiel est un exemple typique de cette pluralité d'interprétation et de sa fécondité. S'agissant des fonctions harmoniques, du problème de Dirichlet, de la notion de potentiel et de fonction surharmonique, de la méthode du balayage, du problème de l'équilibre, etc. certaines questions se nourrissent l'intuition de la gravitation newtonienne, certaines plutôt de celle de l'électrostatique, d'autres de la théorie de la chaleur ou encore de celle des membranes ou de la mécanique des fluides. Difficile de comprendre les potentiels en double couche en pensant avec la gravitation où les masses sont positives. Et puis une nouvelle interprétation est apparue encore au vingtième siècle, en termes du processus aléatoire du mouvement brownien. C'est grâce à cette dernière que Doob découvrit un résultat fin de convergence appelé "théorème de Fatou à la frontière" et ne parvint à lui trouver une preuve classique que l'année suivante.

A cet égard, lorsque, fort de l'axiomatisation qu'il a proposée avec Whitehead, au début du vingtième siècle, Russell affirme qu'il a ramené les mathématiques à la logique, il se méprend largement sur la puissance de l'intuition ensembliste. On sous-estimait à cette époque la complexité de la combinatoire, on pensait que, peut-être, par un examen méticuleux de la syntaxe mathématique on parviendrait à montrer de façon élémentaire et quasi mécanique l'inutilité des excursions et des méthodes impures et en premier lieu que le système est non contradictoire. Il fallut se faire une raison. Après le résultat d'incomplétude de Gödel et les travaux des années trente, on prit une mesure beaucoup plus vertigineuse de la complexité : le simple, qui nous intéresse finalement, est aussi le résultat de longs détours au pays de l'inextricable qu'aucune vision globale ne peut complètement appréhender. Cela réhabilite l'importance du sens et, du même coup, projette un intérêt nouveau sur les travaux mathématiques du passé. Ils ne sont pas purement et simplement dépassés par l'approche ensembliste moderne, ils rivalisent avec elle dans l'intuition qu'ils proposent, tantôt supplantés par des idées plus efficaces, tantôt germes de méthodes encore mal exploitées. Dès lors qu'on abandonne l'objectif moderne d'imposer aux mathématiques une présentation sémantique intuitive unifiée, celles-ci sont véritablement, intrinsèquement constituées de diverses interprétations récentes ou anciennes qui donnent les plus vives lumières sur les différents sujets. C'est ainsi que les mathématiques ont fonctionné jusqu'au dix-huitième siècle, le prémoderne et le post-moderne se rejoignent dans l'absence ou l'abandon d'un rêve d'explication globale.

### 4. Popper, Quine et la modélisation

Revenons à *la modélisation*.

Il y a plusieurs façons de modéliser, bien sûr, comme pour photographier on peut prendre divers angles de vue.

Pour étudier l'effet de serre on peut faire des calculs de thermodynamique ou relever les séries temporelles des températures et extrapoler. Chacune de ces démarches parallèles pour s'appliquer doit être soumise à vérification et validation. Au demeurant chaque modélisation reste une interprétation et les diverses approches peuvent être contradictoires : *le réel lui-même est en débat, au moins partiellement.*

Le mathématicien qui tente de donner du sens à certains maniements de la combinatoire des signes et l'ingénieur qui modélise sont dans des situations semblables dans la mesure où les lectures qu'ils élaborent ne sont pas les seules possibles.

Je dois insister ici sur le phénomène fondamental de la *sous-détermination*.

Point n'est besoin de rappeler ici la philosophie de W. V. O. Quine si ce n'est en disant que son œuvre consiste pour l'essentiel en partant de la logique mathématique et du constat fondamental que les langages formalisés utilisés en mathématiques sont non-catégoriques et ont donc plusieurs interprétations (Löwenheim-Skolem 1915-1920) à transposer cette idée dans les sciences humaines et en linguistique notamment en considérant que la situation ne pouvait pas être meilleure pour les langues ordinaires. Il arrive ainsi à trois thèses fortes qui ont fait sa renommée : *l'indétermination de la traduction, la relativité de l'ontologie, et la sous-détermination des théories par l'expérience*<sup>5</sup>.

Autant les exemples fournis par Quine et ses commentateurs sont peu convaincants pour ne pas dire tirés par les cheveux, autant la modélisation nous met couramment en situation quinienne. Le premier auteur contemporain à s'être rendu compte de phénomènes de sous-détermination est à ma connaissance Henri Atlan à propos de la biologie : "Dans certains cas, il existe plusieurs théories différentes, non redondantes l'une par rapport à l'autre, qui prédisent avec la même exactitude les faits d'observation. Aucun moyen empirique n'existe alors pour trancher entre ces théories bien que leurs significations et les implications éventuelles de leurs généralisations soient tout à fait différentes"<sup>6</sup>. Mais ceci n'est aucunement spécifique à la biologie, j'ai décrit explicitement une telle sous-détermination à propos de modèles de crues d'une rivière<sup>7</sup>. Elle provient souvent du fait qu'on ne peut réaliser qu'un nombre fini de mesures alors qu'on dispose de théories différentes qui s'ajustent aussi bien les unes que les autres avec des données finies. Par exemple si une fonction ne peut être appréhendée que par des mesures ponctuelles (comme la température mesurée aux stations météorologiques, ou l'altitude mesurée aux points géodésiques) alors la théorie que cette fonction est un polynôme est irréfutable, de même la théorie qu'elle est une somme d'ondelettes ou une combinaison linéaire de gaussiennes, etc.

<sup>5</sup> W. V. O. Quine, *Relativité de l'ontologie et autres essais*, Aubier, 1969; *Philosophie de la logique*, Aubier, 1975; *Le mot et la chose*, Flammarion, 1978.

<sup>6</sup> H. Atlan, "Des limites de la science au besoin de philosopher", in *Science et philosophie pourquoi faire ?* Ed. Le Monde, 1990.

<sup>7</sup> Cf. N. B. *Philosophies des mathématiques et de la modélisation*. L'harmattan 1999.

Une fois qu'on a touché du doigt concrètement les phénomènes de sous-détermination, on prend aisément conscience de leur généralité. On doit alors en tirer les conséquences quant à la critique des modèles. Le modèle nous emporte dans une vision du monde, perfectible donc irréfutable, qui n'est toutefois pas la seule façon de voir les choses. Voici un modèle de trafic justifiant la réalisation d'une infrastructure de transport en région Ile de France, voici un gros dossier calculant la diffusion de la radioactivité dans le sol par dissolution de déchets vitrifiés, on ne peut certainement pas rester devant ces modélisations dans une attitude, je dirais poppérienne, en les considérant comme de la science et en s'évertuant de les contrer sur telle ou telle expérimentation. Ils sont une lecture de la réalité, et l'attitude, que je dirais quinienne pour faire bref quoique Quine ne se soit pas engagé dans ces problématiques, consiste à s'échapper de l'interprétation proposée en en construisant une autre à côté, nous reviendrons plus loin sur ce point.

### 5. Que veut dire parler avec des mathématiques ?

Nous approchons ainsi d'une *conception langagière des mathématiques*, mais non au sens de langage entre l'homme de science et le monde (ni au sens platoniste ni au sens matérialiste, les deux se rejoignant comme croyance à l'absolu et l'universalité du réel y compris social et psychique) au sens d'un langage entre les acteurs sociaux (entre les entreprises, entre les ONG et les modélisateurs du climat, entre les experts de Bruxelles et les fabricants de déchets nocifs, etc.).

Il est significatif à cet égard que le texte officiel du Ministère de l'Education Nationale sur les mathématiques au collège distingue maintenant trois finalités de cet enseignement :

- A. les mathématiques comme discipline de formation générale
- B. l'outil mathématique
- C. les mathématiques comme discipline d'expression.

Les deux premières sont classiques mais restent fondamentales. Tout le secondaire est l'acquisition d'un langage mathématique central, indispensable pour la plupart des orientations professionnelles et pour la liberté de l'individu dans le monde actuel où la technique a si grande part.

La troisième est beaucoup plus originale et même surprenante a priori. « Les mathématiques participent à l'enrichissement de l'emploi de la langue par les élèves, en particulier par la pratique de l'argumentation. Ainsi que d'autres disciplines, les mathématiques ont en charge l'apprentissage de différentes formes d'expression autres que la langue usuelle (nombres, figures, graphiques, formules, tableaux, schémas) ». Il s'agit là de la plus grande nouveauté par rapport à l'esprit unitaire des maths modernes. Elle laisse entrevoir une vision des mathématiques où celles-ci fournissent des "mots" nouveaux au langage ordinaire. Entamer une telle pratique est possible au collège, cela devient essentiel au lycée et ensuite. Il ne faut pas toutefois sous-estimer la difficulté. L'expression dans le langage hybride, semi-artificiel de la modélisation qui mélange des propos dans la langue de Balzac, des symboles, des chiffres et des

déductions, reste un exercice délicat et insuffisamment pratiqué même dans les écoles d'ingénieurs.

Je voudrais citer quelques activités dans l'esprit de cette troisième finalité des mathématiques comme moyen d'expression, en m'excusant auprès des enseignants qui, bien sûr, ont déjà fait ce genre d'expériences et sont allés, ici ou là, beaucoup plus loin.

La *résolution par traduction* permet de relativiser la puissance des formalismes. Elle est évidemment illustrée par la géométrie analytique qui permet d'aborder graphiquement des problèmes numériques ou, au contraire, de résoudre par le calcul algébrique des questions géométriques. Les thèmes se prêtant à l'exercice de traduction sont nombreux. Le calcul propositionnel maintenant abordé pour introduire à l'informatique s'y prête grâce à l'interprétation ensembliste (intersections et réunions) et à celle des circuits électriques en série ou en parallèle. Le calcul des probabilités peut être abordé très tôt dans le cas d'un nombre fini d'événements. Il se prête à des traductions avec le calcul barycentrique. Dès qu'on peut les aborder les transformations géométriques (homothétie, inversion, etc.) sont par nature des traductions grâce auxquelles on peut tenter de simplifier des problèmes.

*L'initiation à l'interprétation* est une condition pour restituer une juste place aux mathématiques dans l'opinion. Par exemple une transformation ponctuelle du plan étant donnée par la forme analytique de son résultat sur le point  $(x, y)$ , on demande de décrire la transformation et ce qu'elle donne d'objets géométriques connus. Ou bien deviner l'expression analytique d'une courbe dessinée sur papier millimétré sachant que son équation fait appel à un vocabulaire spécifié. Vers la fin des études secondaires, les élèves ont aujourd'hui des notions de programmation sur ordinateur. Ils connaissent au moins des formes simplifiées de langages analogues à BASIC, LOGO, PASCAL ou C, etc. Un exercice extrêmement instructif est *de décrire en français ce que fait un programme non commenté*, qu'on peut expérimenter sur machine et dont on a le texte. Suivant les procédures choisies, qui peuvent être simples et se relier à divers thèmes mathématiques, ce type d'activité peut prendre des formes très variées et à divers niveaux. Il a l'immense vertu d'astreindre les élèves à s'exprimer en français pour dire des choses rigoureuses, ce qui est bien sûr excellent.

Est-il possible dès le secondaire d'aborder ne serait-ce que comme sensibilisation le domaine de *la modélisation* ? Même si son niveau naturel est celui des filières scientifiques du supérieur, elle est un tel enjeu de société qu'il est important de familiariser les élèves à l'idée de représenter grâce à des outils mathématiques et à communiquer avec ces représentations. Une voie possible est d'utiliser les fonctions (de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ ) qui sont le principal langage connu des élèves au lycée et de les exercer à l'approximation : une fonction  $f_0$  étant donnée par sa valeur en chaque point d'un intervalle (elle a été par exemple programmée sur ordinateur) dont l'expression analytique (éventuellement compliquée) est inconnue des élèves, il leur est demandé de fournir une bonne approximation  $f_1$  de cette fonction, la définition de la fonction  $f_1$  devant être correcte et tenir en un espace

limité, par exemple 50 caractères ou encore devant utiliser un vocabulaire imposé. La fonction  $f_1$  est le modèle réalisé par chaque élève. On peut corriger l'exercice en estimant l'aire de  $|f_0 - f_1|$  sur l'intervalle, ce qui fournit une évaluation de la qualité du modèle mais il est plus intéressant d'appréhender la valeur communicante de chaque modèle : on ramasse les formulaires remplis et on les redistribue dans un autre ordre. Chaque élève procède alors à la comparaison de  $f_0$  avec la fonction  $f_1$  décrite par un autre qu'il doit comprendre. Ce type de travaux pratiques peut faire l'objet de spécifications variées, il faut évidemment l'adapter au niveau des élèves. On peut éventuellement itérer le processus en faisant approcher la fonction  $f_1$  dans un autre vocabulaire de fonctions ce qui donne la fonction  $f_2$ , etc. Il est important de faire rédiger des conclusions<sup>8</sup>. L'exercice de modélisation est l'équivalent pour les mathématiques de la rédaction pour les lettres : savoir utiliser un langage pour décrire une situation. La difficulté dans le secondaire vient du fait que le vocabulaire disponible est assez restreint, on ne peut donc y envisager qu'une ouverture en activité d'accompagnement. Mais tel n'est plus le cas dès les premières années de l'enseignement supérieur où la maîtrise de la programmation d'une part, l'introduction de notions de probabilité et de statistiques d'autre part, ouvrent un champ immense à la modélisation, largement exploité d'ailleurs dans la pédagogie des formations d'ingénieur.

Il est encore un autre entraînement très formateur s'il est soigneusement mis en œuvre : *l'analyse mathématique de textes scientifiques*. Il consiste à partir de textes de physiciens, de chimistes ou d'économistes du passé, judicieusement choisis en fonction des connaissances des élèves, de leur faire expliquer en langage moderne ce que font ces auteurs, quel problème ils se proposent de résoudre et comment. C'est l'analogue de l'explication de textes littéraires mais sur des écrits de savants ou d'ingénieurs. Evidemment une telle analyse peut vite devenir très difficile si les questions sont scientifiquement délicates et la symbolique par trop désuète. Les historiens néanmoins, ont fait l'essentiel du travail de tri<sup>9</sup>. Ce nouveau genre d'anthologie peut accueillir des auteurs célèbres comme Pascal Lavoisier Condorcet et même Archimède dont certains passages sont exemplaires, mais aussi des écrits plus ordinaires pris dans les règlements ou les calculs économiques du dix-neuvième siècle.

<sup>8</sup> Intéressante également dans cet ordre d'idée est la "bataille navale géométrique" : chaque élève d'un binôme définit une figure géométrique (par exemple constituée d'un cercle et de deux droites) dans un système de coordonnées. Pour deviner la figure de son adversaire, il tire des droites et non des points. Si à son tour de jouer, il propose ainsi la droite  $y = 2x + 1$ , son adversaire lui indique tous les points d'intersection de sa figure avec  $y = 2x + 1$ , etc. Il y a de multiples variantes suivant les figures cachées et les objets qu'on tire, la déduction et la combinatoire ne sont pas absentes de ce jeu qui peut s'organiser en tournoi comme les échecs.

<sup>9</sup> A titre d'exemple de pédagogie de "l'explication de texte" sur des sources historiques, voir *Aux origines du calcul infinitésimal*, IREM de Basse-Normandie, Ellipses, 1999.

## 6. Enseigner la modélisation critique

En conclusion je dirai que le débat sur les mathématiques post-modernes est un faux débat si on le limite à cette terminologie.

Il y a derrière ce conflit un enjeu beaucoup plus important qui va au-delà des mathématiques et qui concerne les rapports entre sciences et société. La modélisation, dans les faits, est tout auréolée de science, alors qu'elle sert la plus souvent des intérêts partisans. Qui seront les intellectuels capables d'une pensée critique ?

La scission des deux cultures fait qu'aujourd'hui la pensée critique est exclusivement en langage ordinaire, la langue des romanciers des philosophes, des hommes politiques et des journaux de sorte que le débat, les essais, l'utopie et la critique restent dans une sphère étrangère à tout ce qui s'exprime avec les signes, concepts, issus de la grande science.

Le langage ordinaire n'a pas prise sur ces argumentations. Il serait vain de critiquer Keynes avec la langue de Racine. Aussi pour échapper à la critique, marquer des faits accomplis non démocratiquement débattus, il suffit de faire des dossiers ou des programmes informatiques en mêlant argumentation et modélisation, c'est accepté sans qu'aucun intellectuel ne s'émeuve.

Je suis en faveur de l'ouverture des UFR et de départements nouveaux du CNRS, de l'INSERM et de l'INRA sur les méthodes de la critique des discours semi-artificiels. On pourrait commencer par les thèses. Dans toutes les sciences de l'ingénieur les thèses consistent à modéliser. Tout le monde modélise et tous les jurys font comme si c'était de la science. Personne ne s'intéresse aux modélisations concurrentes, leur comparaison au moyen de l'imagination critique.

---

### Author:

Nicolas Bouleau  
École Nationale des Ponts et Chaussées  
6 et 8 avenue Blaise Pascal, Cité Descartes  
Champs-sur-Marne  
77455 Marne-la-Vallée CEDEX 2  
e-mail : [bouleau@enpc.fr](mailto:bouleau@enpc.fr)