„ ... aber ein Quadrat ist kein Rechteck“ – Schülerschwierigkeiten beim Verwenden einfacher geometrischer Begriffe in Jahrgang 8

Aiso Heinze, Oldenburg (Germany)

Abstract: ***„... because a square is not a rectangle“ – students‘ difficulties with simple geometric concepts.*** The knowledge of concepts is essential for students when they start to learn proof. Empirical findings of a study with 106 grade 8 students show that there are deficits in students’ concept understanding scheme for quadrangles. These deficits are particularly based on a different idea of the classification of quadrangles and difficulties in the understanding of the mathematical language and thinking - problems which will cause difficulties regarding learning and teaching proof.

Kurzreferat: Das Wissen und das Verständnis von Begriffen ist essentiell, wenn Schülerinnen und Schüler an das Beweisen und begründen herangeführt werden. Die Ergebnisse einer empirischen Untersuchung von 106 Schülerinnen und Schülern aus Jahrgang 8 zeigen, dass es Defizite bei Kenntnissen und beim Verständnis von Vierecken gibt. Diese basieren insbesondere auf einem anderen Verständnis der Klassifikation von Vierecken, als auch auf einem anderen Verständnis der mathematischen Sprache und dem mathematischem Denken. Beides ist problematisch im Hinblick auf das Erlernen von Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht.

ZDM-Classification: C33, D73, E43, G23, G43

Einleitung

Die mathematische Definition gehört in der Mathematik zweifellos zu den grundlegenden Begriffen. Zusammen mit Axiomen, Lemmata, Sätzen und Folgerungen (inzwischen zählen bis zu einem gewissen Grad auch Vermutungen dazu) bilden Definitionen das Grundgerüst mathematischer Theorie. Obwohl es Einigkeit darüber gibt, dass Definitionen gewisse notwendige Eigenschaften haben müssen, beispielsweise dürfen sie nicht zirkulär sein oder Widersprüche enthalten, gibt es keinen Konsens darüber, welche Eigenschaften hinreichend für eine gute und elegante Definition sind (vgl. Shir & Zalavsky 2001). Letzteres hängt in der Mathematik sicherlich auch davon ab, in welcher Funktion die konkrete Definition hauptsächlich verwendet werden soll. Dennoch, ob elegant oder nicht, mathematische Definitionen sind Voraussetzungen für die Formulierung von mathematischen Sätzen und Beweisen und damit sind sie essentiell für die Entwicklung von Mathematik als deduktive Theorie.

Betrachtet man nun den Mathematikunterricht, so sieht die Situation anders aus. Mathematische Begriffe werden in der Regel nicht durch Definitionen eingeführt. Das Lehren von mathematischen Begriffen ist eine Herausforderung, die von mehr als nur mathematischen Bedingungen abhängt. Insbesondere im Geometrieunterricht der Grundschule lernen Schülerinnen und Schüler Geometrie nicht als deduktive Theorie kennen, sondern u. a. aufgrund von pädagogischen und lernpsychologischen Gründen als Lehre vom Anschauungsraum. Es liegt auf der Hand, dass auf dieser Stufe die Begriffsentwicklung und das Erkennen von einfachen mathematischen Sätzen nicht durch das Unterrichten von formalen Definitionen geschieht, sondern auf der Basis von Beispielen und der Anschauung stattfindet. Damit wird in der Grundschule an den induktiven Charakter des Alltagsdenkens der Kinder angeknüpft und ein erster Zugang zur Geometrie geschaffen. Der nach einigen Schuljahren folgende Übergang vom Alltagsdenken in der Lehre vom Anschauungsraum hin zum wissenschaftlichen Denken in der deduktiven Geometrie in höheren Klassen ist in der Regel mit vielfältigen Problemen behaftet. Diese Probleme bereiten den Schülerinnen und Schülern dann Schwierigkeiten beim mathematischen Denken, das beim Problemlösen, Begründen und Beweisen verlangt wird. Eines der grundlegenden Probleme ist in dem aufgebauten individuellen Begriffswissen der Schüler und dessen Anwendung zu sehen.

1. Theoretischer Hintergrund

1.1 Wissenschaftliches Denken und Voraussetzungen für das Erlernen von Beweisen und Begründen

In den letzten Jahren gab es eine Reihe von mathematikdidaktischen und kognitionspsychologischen Beiträgen, um die Entwicklung des wissenschaftlichen Denkens bei Schülerinnen und Schülern zu beschreiben. Die Forschungsergebnisse in diesem Bereich zeigen, dass es verschiedene Einschränkungen im präadoleszenten wissenschaftlichen Denken gibt (u.a. Kuhn 1989 Reiss & Thomas 2000). So werden beispielsweise Argumentationsketten häufig auf einer eher empirischen und intuitiven Basis aufgebaut und nicht auf Schlüssigkeit geprüft, Plausibilitätsbetrachtungen spielen eine nicht unwesentliche Rolle, Hypothesen werden ohne vollständige Prüfung angenommen und eigene Annahmen werden in der Regel nicht mehr in Frage gestellt.

Nach Flavell (1977) ist ein empirisch-induktives Argumentieren typisch für Schülerinnen und Schüler in der konkret-operationalen Phase, wohingegen ein hypothetisch-deduktives Vorgehen typisch für die formal-operationale Phase ist. Diese Hypothese wird u. a. durch empirische Befunde bei Studien mit Acht- und Zehntklässlern gestützt, in denen die Fähigkeiten zum mathematischen Beweisen und Begründen untersucht wurden (Healy & Hoyles 1998; Reiss, Hellmich & Thomas in Vorbereitung).

In einer früheren Studie mit Abiturientinnen und Abiturienten konnten wir verschiedene Voraussetzungen identifizieren, die für ein erfolgreiches Beweisen und Begründen im Geometrieunterricht förderlich sind. Wie in Reiss, Klieme & Heinze (2001) aufgezeigt, wird die geometrische Kompetenz insbesondere durch Begriffswissen, Methodenkompetenz, Metakognition und dem räumlichen Vorstellungsvermögen beeinflusst. Zur Bestimmung des Begriffswissens wurde in diesem Fall mit der „Kongruenz“ ein in der Schulgeometrie zentraler Begriff ausgewählt. Die Schülerinnen und Schüler wurden aufgefordert, eine Definition, ein Beispiel, eine Zeichnung und einen mathematischen Satz im Zusammenhang mit dem Begriff „Kongruenz“ anzugeben. Unsere Untersuchung hat beachtliche Defizite im Begriffswissen der Probanden aufgezeigt. Es zeigte sich, dass selbst Schülerinnen und Schüler am Ende der Sekundarstufe II häufig nur ein vages, intuitives Verständnis von Begriffen wie „Kongruenz“ haben und dass dieses Verständnis sich auf Beispiele beschränkt. Exaktes Wissen von den zugehörigen Definitionen und Sätzen ist dagegen kaum vorhanden.

Letzteres entspricht auch den Ergebnissen anderer Untersuchungen: Das Schülerwissen von geometrischen Begriffen und den zugehörigen Begriffsdefinitionen ist häufig inkonsistent (u.a. Hershkowitz & Vinner 1982; Wilson 1990). Weitere Schülerprobleme in Bezug auf Definitionen sind das Verständnis von notwendigen und hinreichenden Bedingungen und die ungenaue Verwendung der Sprache, wenn Definitionen formuliert werden (Burger & Shaughnessy 1985, 1986; Wilson 1990). Diese Schülerschwierigkeiten werden stark davon beeinflusst wie die geometrischen Begriffe in den Schulbüchern und auch im Mathematikunterricht dargestellt werden (z. B. Burger & Shaughnessy 1985).

1.2 Begriffsdefinition, Begriffsbild und Begriffsverwendung

Wie schon erwähnt muss zwischen einer mathematischen Definition eines Begriffs und dem persönlichen Bild, das der Schüler von diesem Begriff hat, unterschieden werden. Um dies genauer zu beschreiben, haben Vinner und andere das theoretische Modell des persönlichen *Begriffsbildes* (*concept image*) eingeführt (Vinner 1991). Dieses Modell wurde in einer Reihe von Untersuchungen verwendet, um das Bild bei Schülerinnen und Schülern von verschiedenen mathematischen Begriffen wie z.B. Funktion, Grenzwert usw. zu untersuchen (u.a. Tall & Vinner 1981; Vinner 1983; Vinner & Dreyfus 1989). Das Begriffsbild wird beschrieben als

> “... something non-verbal associated with the concept name. It can be a visual representation of the concept in case the concept has visual representations; it can be a collection of impressions or experiences” (p. 68, Vinner 1991).

Das Begriffsbild wird im Gedächtnis durch den Begriffsnamen aufgerufen; es ist spezifisch für ein Individuum. Die Existenz eines Begriffsbildes ist eine notwendige Voraussetzung, damit ein Individuum ein Begriff verstehen kann: “To acquire a concept means to form a concept image” (p. 69, Vinner 1991). Das Wissen um eine Begriffsdefinition kann dabei unabhängig von der Ausbildung eines Begriffsbildes sein: eine Begriffsdefinition zu kennen impliziert nicht, einen Begriff verstanden zu haben. Das Begriffsbild kann je nach Kontext, in dem ein Begriff auftaucht, unterschiedlich sein. Aus diesem Grund sprechen Tall & Vinner (1981) auch von dem jeweils *aufgerufenen Begriffsbild*.

Moore (1994) hat das Modell Vinners zu dem *Begriffsverständnis* (*concept understanding scheme)* erweitert. Das Begriffsverständnis beinhaltet drei Aspekte: die Begriffsdefinition, das Begriffsbild und als dritten Aspekt die *Begriffsverwendung* (concept usage). Die Begriffsverwendung “refers to the ways one operates with the concept in generating or using examples or doing proofs” (p. 252, Moore 1994).

Sowohl Moore (1994) als auch Vinner (1991) beschreiben als Hauptproblem für Schülerinnen und Schüler die korrekte Verwendung von Begriffen in ihren mathematischen Aktivitäten. Wenn ein Schüler mit einem mathematischen Problem konfrontiert ist, in dem ein bestimmter Begriff auftaucht, dann wird in seinem Gedächtnis das zu dem jeweiligen Kontext assoziierte Begriffsbild aufgerufen. Im Problemlöseprozess wird dann mit diesem Begriffsbild gearbeitet und eine Lösung konstruiert. Um sicher zu sein, dass eine korrekte Lösung für das Problem gefunden wurde, muss der Schüler schließlich noch prüfen, ob die Operationen, die er mit seinem persönlichen Begriffsbild durchgeführt hat, auch mit der Begriffsdefinition ausführbar sind. Gerade in diesem von Schülern häufig vernachlässigten Schritt findet sich ein Unterschied zwischen dem Alltagsdenken und dem wissenschaftlichen Denken: im Alltagsdenken ist es im Allgemeinen nicht notwendig, die Kompatibilität der Operationen zur Problemlösung mit der Begriffsdefinition zu prüfen (in vielen Fällen gibt es sogar so eine Begriffsdefinition gar nicht, z.B. für den Begriff „Baum“). In einem mathematischen Kontext ist es im Allgemeinen unerlässlich, das persönliche Begriffsbild mit der Begriffsdefinition abzugleichen. Die Fähigkeit zwischen dem persönlichen Begriffsbild und der Begriffsdefinition hin- und herzuspringen ist essentiell für die Tätigkeiten in einem mathematischen Kontext. Dies kann ebenso in dem Forschungsprozess bei Mathematikern beobachtet werden. Mathematiker holen nicht Definitionen und Sätze aus ihrem Gedächtnis hervor um logische Deduktionsketten zu konstruieren. Im Gegenteil, zunächst achten sie nicht auf jedes Detail, sondern betrachten die Argumentationslinie in groben Zügen, um wichtige Eigenschaften und Zusammenhänge zu erkennen. Dann, wenn sie wissen, wie sie zu argumentieren haben, werden sie einen mathematischen Beweis konstruieren, wobei sie formale Definitionen und Sätze verwenden (vgl. Koedinger & Anderson 1990).

1.3 Partitionale und hierarchische Klassifikation

Die Diskussion des Begriffsverständnisses von Schülerinnen und Schülern zu geometrischen Objekten wie Dreiecken und Vierecken kann nicht unabhängig von der Betrachtung der Klassifikation dieser Objekte stattfinden. Wie schon in de Villiers (1994) beschrieben, gibt es hier zwei hauptsächlich auftretende Klassifikationstypen: die hierarchische und die partitionale Klassifikation. Eine Klassifikation heißt *hierarchisch*, wenn in einer Klasse von Objekten die spezielleren Objekte Unterklassen von den allgemeineren Objekten darstellen (Klasseninklusionen). Im Gegenteil dazu sind in einer *partitionalen Klassifikation* die verschiedenen Unterklassen paarweise disjunkt. Beispielsweise kann man im ersten Fall Quadrate als spezielle Rechtecke und Rechtecke als spezielle Parallelogramme ansehen. Im zweiten Fall dagegen ist ein Quadrat kein Rechteck und ein Rechteck ist kein Parallelogramm.

Da in der Mathematik Klassifikationen und auch die assoziierten Definitionen in einem gewissen Maße beliebig gesetzt sind, ist die Wahl einer hierarchischen oder einer partitionalen Klassifikation keine Frage der richtigen oder falschen Klassifikation, sondern zunächst eine Frage der Benutzerfreundlichkeit, der Ökonomie und der persönlichen Gründe. Im Falle der Dreiecke und Vierecke ist es in der Mathematik Konsens eine hierarchische Klassifikation zu verwenden. Dies wird laut Lehrplan in den Schulen auch so unterrichtet.

Verschiedene empirische Studien haben aufgezeigt, dass Schülerinnen und Schüler auch noch in der Sekundarstufe I zu einer partitionalen Klassifikation von Vierecken tendieren (u.a. Burger & Shaughnessy 1985; de Villiers 1994, 1998). Zudem hat de Villiers (1994) gezeigt, dass sogar Schüler, die hohe Leistungen im Bereich des logischen Begründens und Argumentierens aufweisen, noch eine partitionale Klassifikation von Vierecken bevorzugen, wenn man ihnen die freie Wahl lässt. Er schlägt deshalb vor, dass die Klassifikation von Dreiecken und Vierecken im Unterricht so behandelt wird, dass eine sinnstiftende Diskussion möglich ist. Wie in de Villiers (1998) beschrieben, sollen Vor- und Nachteile der verschiedenen Klassifikationstypen verglichen werden, sodass die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass eine hierarchische Klassifikation ökonomischer ist als eine partitionale.

2. Forschungsfrage und Design der Studie

In Anlehnung an den dargestellten theoretischen Hintergrund haben wir Aspekte des Begriffsverständnisses von Schülerinnen und Schülern untersucht. Die Probanden befanden sich alle in Jahrgang 8, also auf einer Stufe, in dem im Mathematikunterricht mit dem Beweisen begonnen wird. Wir haben uns in der Untersuchung auf verschiedene Vierecke beschränkt, wobei insbesondere die Begriffe Quadrat und Rechteck im Focus standen, die den Schülern in Klasse 8 „gut" bekannt sind. Die Forschungsfrage, die in diesem Artikel näher betrachtet werden soll, ist die folgende:

> Ist das Begriffsverständnis von Schülerinnen und Schülern zu (speziellen) Vierecken hinreichend, um in verschiedenen Situationen mathematische Problemstellungen zu bearbeiten, wie beispielsweise das Erkennen von äquivalenten Beschreibungen, das Auffinden von Gegenbeispielen und die Unterscheidung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen?

Für diese Forschungsfrage betrachteten wir drei Items einer Studie, die für die Untersuchung von Basiskenntnissen als Voraussetzung für das Beweisen im Mathematikunterricht durchgeführt wurde. In dieser Studie wurden die Kenntnisse der Schülerinnen und Schüler von fünf mathematischen Konzepten/Prinzipien, dargestellt durch zehn Items, in einem Paper-und-Pencil Test erhoben. Es ging dabei um Definitionen, äquivalente Beschreibungen, Argumentationen und Beweise, logische Implikationen und Gegenbeispiele. Der Test wurde durch einen Lehrer in vier achten Klassen einer Realschule durchgeführt. Insgesamt umfasste die Untersuchung 106 Schülerinnen und Schüler (50 Mädchen, 53 Jungen, 3 keine Angaben). Der Test musste in 45 Minuten bearbeitet werden. Eine ausführlichere Darstellung der Studie ist bei Heinze & Kwak (2002) zu finden.

Die drei Items, die für die oben genannte Forschungsfrage verwendet wurden, sehen wie folgt aus:

1. Das Erkennen von äquivalenten Beschreibungen eines Quadrates: Sechs Beschreibungen von Vierecken wurden vorgegeben und die Schülerinnen und Schüler sollten diejenigen ankreuzen, die ein Quadrat beschreiben (Multiple Choice).
2. Das Konstruieren von Gegenbeispielen: Wir präsentierten das folgende Problem: „Klaus betrachtet Quadrate und Rechtecke. Er sagt: ‘In jedem Viereck ist jeder Winkel 90° groß.‘ Karin antwortet: ‘Das ist nicht richtig.‘ Wie kannst Du zeigen, dass Karin recht hat?"
3. Der Unterschied zwischen notwendigen und hinreichenden Bedingungen: Hier fragten wir: „Wenn ein Viereck ein Rechteck ist, dann sind die gegenüberliegenden Seiten parallel. Also gilt auch: Wenn in einem Viereck die gegenüberliegenden Seiten parallel sind, dann handelt es sich um ein Rechteck. Ist das richtig? Begründe Deine Antwort kurz."

3. Ergebnisse

Im Folgenden werden die Ergebnisse der drei Items dargestellt. Tabelle 1 zeigt die Ergebnisse des ersten Items (Welche Vierecke sind Quadrate? Kreuze an!).

Tabelle 1:Item 1 - „Welche Vierecke sind Quadrate?"
korrekte Antworten

Vierecke, in denen ...	Anzahl	Prozent
a) vier Seiten gleich lang sind und alle Winkel 90° groß sind.	88	83,0 %
b) jeder Winkel 90° groß ist.	48	45,3 %
c) drei Winkel 90° groß sind und zwei benachbarte Seiten gleich lang sind.	6	5,7 %
d) alle Seiten gleich lang sind.	34	32,1 %
e) die gegenüberliegenden Seiten parallel sind.	63	59,4 %
f) vier Seiten gleich lang sind und ein Winkel 90° groß ist.	19	17,1 %

Betrachtet man die drei Beschreibungen eines Quadrates (Antworten (a), (c) und (f)), so ist zu sehen, dass 83% der Schülerinnen und Schüler erkannt haben, dass ein Viereck mit vier gleich langen Seiten und vier Winkeln mit 90° ein Quadrat ist. Antwort (f) (vier gleich langen Seiten und ein Winkel mit 90°) wird von 17,1% erkannt und Aussage (c) (drei Winkel sind 90° groß und zwei benachbarte Seiten sind gleich lang) wird nur von 5,7% akzeptiert. Umgekehrt denken mehr als die Hälfte der Schülerinnen und Schüler, dass jedes Viereck mit vier rechten Winkeln ein Quadrat sei (b) und mehr als zwei Drittel glauben, dass jedes gleichseitige Viereck ein Quadrat sei (d). Die Tatsache, dass ein Parallelogramm im Allgemeinen kein Quadrat ist (e), wissen knapp 60 % der Schüler. Bemerkenswert ist, dass etwa zwei Drittel der Schülerinnen und Schüler ein gleichseitiges Viereck als Quadrat akzeptieren, aber nur 17,1% ein gleichseitiges Viereck mit einem rechten Winkel als Quadrat ansehen.

Die Gesamtzahl korrekter Antworten pro Schüler ist in Tabelle 2 (folgende Seite) dargestellt. Es zeigt sich, dass alle Schülerinnen und Schüler mindestens eine richtige Antwort gegeben haben. Allerdings haben etwas mehr als die Hälfte nur eine oder zwei der sechs Fragen korrekt beantwortet.

Betrachtet man nur die korrekten Beschreibungen für ein Quadrat (Antworten (a), (c) und (f)), dann haben 71,7% der Schülerinnen und Schüler eine, 13,2% zwei und nur 2,8% (drei Personen) alle drei äquivalenten Beschreibungen für ein Quadrat zwischen den sechs Antwortmöglichkeiten erkannt. Eine weitergehende Analyse der Schülerantworten zeigt, dass es eine gewisse Ordnung der Antworten nach Schwierigkeit gibt: die einfachsten sind (a), (e) und (b) (in dieser Reihenfolge), d.h. die Schülerinnen und Schüler mit drei oder mehr richtigen Antworten haben in der Regel diese drei Fälle richtig erkannt.

Tabelle 2: Item 1 - Korrekte Antworten pro Schüler

korrekte Antworten	Anzahl	Prozent
0	0	0 %
1	21	19,8 %
2	35	33,0 %
3	34	32,1 %
4	15	14,2 %
5	1	0,9%
6	0	0 %

Tabelle 3 zeigt die Ergebnisse für das zweite Item. Hier war die Aussage „In jedem Viereck ist jeder Winkel 90°groß“ zu widerlegen.

Tabelle 3: „In jedem Viereck ist jeder Winkel 90°groß.“

	Anzahl	Prozent
korrekte Antwort	68	64,2 %
falsche Antwort	22	20,7 %
keine Antwort	16	15,1 %

Mehr als 60% der Schülerinnen und Schüler gaben eine korrekte Antwort. Fast alle diese korrekten Antworten basierten auf einem Gegenbeispiel. Etwa 20% gaben eine falsche Antwort, wovon etwa die Hälfte darauf bestand, dass es richtig sei, dass jeder Winkel in jedem Viereck 90° beträgt.

Die Ergebnisse für das dritte Item sind in Tabelle 4 dargestellt. Es ging um notwendige und hinreichende Bedingungen für Rechtecke: In einem Rechteck sind die gegenüberliegenden Seiten parallel, aber ist ein Viereck mit parallelen gegenüberliegenden Seiten auch immer ein Rechteck?

Tabelle 4: Ist ein Viereck mit parallelen gegenüberliegenden Seiten immer ein Rechteck? Antworten

	Anzahl	Prozent
korrekt mit Begründung	2	1,9 %
korrekt ohne Begründung	8	7,5 %
korrekt mit falscher Begründung	29	27,4 %
falsch	25	23,8 %
keine Antwort	42	39,6 %

Etwa 37 % gaben eine richtige Antwort, wobei viele Schülerinnen und Schüler (28,3%) eine falsche Begründung für ihre Antwort angaben. Mehr als die Hälfte dieser Antworten mit falscher Begründung (16%) basierte auf einer partitionalen Klassifikation von Vierecken (ohne Klasseninklusionen). Typische Antworten waren beispielsweise „Die gegenüberliegenden Seiten eines Quadrats sind auch parallel, aber ein Quadrat ist kein Rechteck.“ Außerdem war festzustellen, dass viele Schülerinnen und Schüler nicht zwischen den Begriffen Quadrat und Viereck unterscheiden. Ferner ist bemerkenswert, dass fast 40% der Schüler keine (mathematische) Antwort bei diesem Item gab. Häufig wurde geschrieben, dass diese Frage zu schwierig sei oder dass keine Logik in der Frage sei.

4. Diskussion

Für die Interpretation der beschriebenen Resultate ist zunächst eine genauere Analyse der Items und der damit verbundenen Anforderungen notwendig. Insbesondere die Beurteilung der sechs verschiedenen Beschreibungen von bestimmten Viereckklassen in dem ersten Item (Welche Vierecke sind Quadrate?) erfordert verschiedene Arten des Denkens. Beispielsweise kann man für die Antworten (c) und (f) ohne eine analytische Herangehensweise kaum eine korrekte Antwort finden. Die Überprüfung, ob drei 90° Winkel und zwei benachbarte gleich lange Seiten bzw. ein 90° Winkel und vier gleich lange Seiten hinreichend sind, um ein Quadrat zu beschreiben, erfordert von den Schülerinnen und Schülern Folgerungen aus Winkel- und Seitenangaben zu ziehen. Ein einfaches Zuordnen eventuell bekannter Viereckklassen wie bei den anderen Antwortmöglichkeiten (u.a. Parallelogramm, gleichseitiges Viereck, gleichwinkliges Viereck) ist hier nicht möglich. Für die Fälle (c) und (f) haben wir entsprechend auch nur eine kleine Anzahl richtiger Antworten erhalten. Dies kann darauf hindeuten, dass die Schülerinnen und Schüler häufig keine analytische Herangehensweise bevorzugten. Die Ergebnisse für die Fälle (d) und (f) (Ist ein gleichseitiges Viereck bzw. ein gleichseitiges Viereck mit einem 90° Winkel ein Quadrat) unterstützt diese Vermutung: 61 Probandinnen und Probanden (57,5%) gaben gleichzeitig an, dass ein gleichseitiges Viereck ein Quadrat ist und dass ein gleichseitiges Viereck mit einem 90° Winkel kein Quadrat ist. Die Schwierigkeit in diesem Fall kann auf Schülerprobleme mit notwendigen und hinreichenden Bedingungen zurückzuführen sein oder aber auch auf ein fehlerhaftes Verständnis der „mathematischen Sprache“ („ein 90° Winkel“ wird als „genau ein 90° Winkel“ interpretiert).

Einschränkungen in dem Verständnis von hinreichenden und notwendigen Bedingungen und der mathematischen Sprache bzw. dem mathematischen Denken kann auch in dem dritten Item identifiziert werden (Wenn die gegenüberliegenden Seiten in einem Viereck parallel sind, dann handelt es sich um ein Rechteck). Obwohl dieses Item ähnlich zu Fall (e) im ersten Item ist, ist es schwieriger für die Schülerinnen und Schüler (37,7% zu 59,4% korrekte Antworten). Dies mag an der expliziten Frage liegen, ob die *notwendige* Bedingung für ein Rechteck „gegenüberliegende Seiten sind parallel“ auch *hinreichend* ist. Auffällig ist hier auch die Bevorzugung der partitionalen Klassifikation von Vierecken durch die Schüler, die bei diesem Item deutlich wurde. Fast die Hälfte der Antworten, die wir als korrekt akzeptiert haben (16% von 37,7%), basierten auf diesem Klassifikationstyp. Die häufig gegebene Begründung „ein Quadrat ist kein Rechteck“ kann aber auch durch die Deutung des Wortes „ist“ als „ist gleich“ bzw. „ist identisch mit“ verursacht werden (vgl. de Villiers 1994).

Die besten Ergebnisse erreichten die Schülerinnen und

Schüler bei dem zweiten Item („In jedem Viereck ist jeder Winkel 90° groß“). Hier gaben etwa 64% eine korrekte Antwort. Dennoch, 15% der Probanden gaben keine Antwort und 20% gaben eine falsche Antwort. Bei etwas über der Hälfte der Probanden mit falscher Antwort konnte ein eingeschränktes Begriffsbild von Vierecken identifiziert werden. Hier wurde explizit behauptet, dass jeder Winkel in einem Viereck 90° groß sei. Ein derart eingeschränktes Begriffsbild von Vierecken ermöglicht natürlich kaum ein sinnvolles Bearbeiten der anderen Items. Erwartungsgemäß zeigten diese Schülerinnen und Schüler insgesamt sehr schwache Ergebnisse.

Die Auswertung zeigt, dass viele Schülerinnen und Schüler in Klasse 8 Defizite in dem Begriffsverständnis von den betrachteten Vierecken haben. Insbesondere wenn sie die Begriffe anwenden mussten, um bestimmte Probleme zu bearbeiten, verwendete ein Großteil nur das persönliche Begriffsbild ohne auf die Begriffsdefinition zurückzugreifen. Das persönliche Begriffsbild war dabei z.T. stark eingeschränkt, sodass eine erfolgreiche Bearbeitung der Items behindert wurde. Die Ergebnisse unterstützen zudem die Resultate von de Villiers (1994), wonach viele Schülerinnen und Schüler eine partitionale Klassifikation von Vierecken bevorzugen. Dies scheint wie oben dargestellt in Beziehung zu einem fehlerhaften Verständnis von mathematischer Sprache und mathematischem Denken zu stehen.

Die diskutierten Schwierigkeiten sind problematisch in einer Schulstufe, in der das Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht beginnt. Insbesondere die Tatsache. dass der Lehrer und ein nicht unerheblicher Teil der Schülerinnen und Schüler ein unterschiedliches Verständnis von der Klassifikation von Objekten sowie von mathematischer Ausdrucksweise und mathematischem Denken haben, kann kaum eine Basis für erste erfolgreiche Schritte in weiterführende mathematische Denkprozesse sein. Es ist essentiell für einen erfolgreichen Unterricht in höherer Mathematik, dass Lehrer und Schüler eine gemeinsame Sichtweise auf die Grundlagen haben.

Literatur

Burger, W. F.; Shaughnessy, J. M. (1985): Spadework Prior to Deduction in Geometry. - In: Mathematics Teacher 78 (H.6), S. 419 – 428

Burger, W. F.; Shaughnessy, J. M. (1986): Characterising the van Hiele levels of development in geometry. - In: Journal of Research in Mathematics Education 17 (H.1), S. 31 – 48

de Villiers, M. D. (1994): The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. - In: For the learning of mathematics 14 (H.1), S. 11 – 18

de Villiers, M. D. (1998): To teach definitions in geometry or teach to define? - In: A. Olivier & K. Newstead (Hg.), Proceedings of the 22nd PME Conference. Vol. 2, Stellenbosch (South Africa): University of Stellenbosch, S. 248 - 255

Flavell, J. H. (1977): Cognitive Development. - Englewood Cliffs, N.J., Pretince Hall

Healy, L.; Hoyles, C. (1998): Justifying and proving in school mathematics. Technical Report on the Nationwide Survey. - Mathematical Science. London: Institute of Education, University of London

Heinze, A.; Kwak, J. (2002): Informal prerequisites for informal proof. - In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) 34 (H.1), S. 9 - 16

Hershkowitz, R.; Vinner, S. (1982): Basic geometric concepts – definitions and images. - In: A. Vermandel; Wilrijk (Hg.), Proceedings of the 6th *PME* Conference. Antwerp (Belgium): Universitaire Instelling Antwerpen, S. 18 – 23

Koedinger, K. R.; Anderson, J. R. (1990): Abstract planning and perceptual chunks: Elements of expertise in geometry. - In: Cognitive Science, 14, S. 511 – 550

Kuhn, D. (1989): Children and adults as intuitive scientists. - In: Psychological Review, 96, S. 674 – 689

Moore, R. C. (1994): Making transition to formal proof. - In: Educational Studies in Mathematics, 27, S. 249 – 266

Reiss, K.; Klieme, E.; Heinze, A. (2001): Prerequisites for the understanding of proofs in the geometry classroom. - In: M. van den Heuvel-Panhuizen (Hg.*)*, Proceedings of the 25th PME Conference. Vol. 4, Utrecht (The Netherlands): Utrecht University, S. 97 - 104

Reiss, K.; Thomas, J. (2000): Wissenschaftliches Denken beim Beweisen in der Geometrie. Ergebnisse einer Studie mit Schülerinnen und Schülern der gymnasialen Oberstufe. - In: Mathematica didactica 23, S. 96 - 112

Reiss, K.; Hellmich, F.; Thomas, J. (i.V.): Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht. Eingereicht bei Zeitschrift für Pädagogik.

Shir, K.; Zalavsky, O. (2001): What constitutes a (good) definition? The case of a square. – In: M. van den Heuvel-Panhuizen (Hg.), Proceedings of the 25th PME Conference. Vol. 4, Utrecht (The Netherlands): Utrecht University, S. 161 - 168

Tall, D.; Vinner, S. (1981): Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. - In: Educational Studies in Mathematics 12, S. 151 – 169

Vinner, S. (1983): Concept definition, concept image and the notion of function. - In: International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 14, S. 293 – 305

Vinner, S. (1991): The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematics. - In: D. Tall (Hg.) Advanced Mathematical Thinking, Dordrecht: Kluwer, S. 65 - 81

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989): Images and definitions for the concept of function. - In: Journal for Research in Mathematics Education, 20 (H.4), S. 356 - 366

Wilson, P. S. (1990): Inconsistent ideas related to definitions and examples. - In: Focus on Learning Problems of Mathematics 12 (H. 3/4), S. 31 – 47

Autor

Heinze, Aiso, Dr., Fachbereich Mathematik, Carl von Ossietzky-Universität Oldenburg, 26111 Oldenburg.
Email: heinze@mathematik.uni-oldenburg.de