

Schülervorstellungen und Schülerfehler im Bereich Drehungen

Eine mehrperspektivische Betrachtung

Jens Hartmann, Oldenburg (Germany)

Abstract: *Students' conceptions and mistakes in the area of rotation. A multiperspective view.* Usually, mistakes are examined either from a constructivist or from a cognitivist point of view. Both consider the source of mistakes in different ways. Therefore a multiperspective view should allow these approaches to complement one another. With a research study, a method of a multiperspective view is drawn up. The sample of this study consisted of 684 grade 7 students. The findings show that combining both views is sensible in the case of a problem concerning rotation. In the context of further geometry problems it proves to be helpful, explaining different error patterns.

Kurzreferat: Fehlerhafte Aufgabenbearbeitungen werden in der Regel entweder vor einem konstruktivistischen Hintergrund oder aus einer kognitivistischen Perspektive betrachtet. Das Zustandekommen von Fehlern wird aus diesen Sichtweisen sehr unterschiedlich beurteilt. In einer mehrperspektivischen Betrachtung können sich die Erklärungspotentiale dieser beiden Ansätze konstruktiv ergänzen. Anhand der hier dargestellten Untersuchung mit 684 Schülerinnen und Schülern der Klasse 7 wird ein Verfahren für eine mehrperspektivische Betrachtung entworfen. Es zeigt sich, dass zur Erklärung der Bearbeitungen einer Aufgabe zur Drehung eine Berücksichtigung beider Sichtweisen sinnvoll ist und die Erklärung unterschiedlicher Bearbeitungsmuster im Kontext mit weiteren Geometrieaufgaben ermöglicht.

ZDM-Classification: D73, G53, C33

1. Einleitung

Abbildungen und ihre Eigenschaften sind Inhalte, denen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe zentrale Bedeutung zukommen. Sie stellen die Basis für die Betrachtung von geometrischen Aussagen und Sätzen dar, die vielfach abbildungsgeometrisch oder über den ‚Umweg‘ der Anwendung von Kongruenzsätzen begründet werden. In der hier vorgestellten Untersuchung werden Bearbeitungen von Aufgaben zur Drehung betrachtet. Durch eine Analyse der dabei zu beobachtenden fehlerhaften Bearbeitungen soll ein Einblick in die Schwierigkeiten und Probleme, die mit diesen Aufgaben verbunden sind, gewonnen werden. Die Auseinandersetzung mit fehlerhaften Aufgabenbearbeitungen hat in der Pädagogik, der Psychologie und auch in den Fachdidaktiken, insbesondere in der Mathematikdidaktik eine lange Tradition. In der Sicht auf die Ursachen und Erklärung von Fehlern lassen sich dabei im Wesentlichen zwei Zugänge unterscheiden, die auf unterschiedlichen Lerntheorien basieren, auf einer kognitivistischen gegenüber einer konstruktivistisch begründeten.

1.1 Kognitivistische Sicht auf Fehler

Aus dem Bereich der Kognitionspsychologie stammt der Ansatz, Lernen als Akt der Informationsverarbeitung zu begreifen (information-processing theories). Wissen

wird in diesem Modell als ein System von symbolischen Strukturen in Form von kognitiven Schemata repräsentiert, das mittels mentaler Prozesse erworben, verändert und benutzt werden kann (vgl. Greer & Verschaffel 1990). Die Bearbeitung von Problemen und Aufgaben kann in diesem System als ein Ineinandergreifen und Abarbeiten von Regeln beschrieben werden. Häufig wird hierzu die Metapher des Computers verwendet. In verschiedensten Bereichen werden mit diesem Ansatz (probabilistische) Lernermodelle erstellt, mit denen das Bearbeiten von Aufgaben und Lösen von Problemen simuliert wird (z.B. Haussmann & Reiss 1990, Reiss & Reiss 1995). Die Analyse von Schülerfehlern in diesem Sinn erklärt typische Fehlerausprägungen durch das Zusammenwirken verschiedener (fehlerhafter) Regeln (vgl. van Lehn 1990). Dieser Ansatz hat sich im Bereich der Mathematik vielfach bewährt, z.B. im Bereich der elementaren Algebra. Malle (1994) erklärt hier typische Fehler der Termumformung durch Fehler in der Verwendung von Schemata. Er unterscheidet z.B. die Übergeneralisierung von Schemata, die Verwendung zu offener Schemata oder die Verwendung unpassender Ersatzschemata. Daneben wird die Rolle von Metaschemata und Defiziten im Bereich Metakognition in diesem Ansatz zur Erklärung des Zustandekommens von fehlerhaften Aufgabenbearbeitungen betont.

1.2 Konstruktivistische Sicht auf Fehler

Aus konstruktivistisch begründeter Perspektive wird Wissenserwerb als ein aktiver Konstruktionsprozess beschrieben. Dabei wird insbesondere die Bedeutung von individuellen Vorerfahrungen fokussiert. Wissen kann in diesem Sinn nicht direkt erworben werden, sondern entsteht immer durch einen aktiven Konstruktionsprozess des Lernenden auf der Grundlage bereits existierenden Wissens (z.B. Hatano 1996). Die erworbenen Konzepte sind somit zunächst durch Alltags- und Vorerfahrungen geprägt und stehen häufig im Widerspruch zu wissenschaftlichen Konzepten. Diese Konzepte stellen jedoch für die Lernenden sinnhafte Vorstellungen dar, die innerhalb der für sie relevanten Kontexte widerspruchsfrei und valide sind. Eine Veränderung dieses Wissens ist demnach nicht durch den Erwerb neuer Konzepte möglich, sondern verlangt die Reorganisation des vorhandenen Wissens im Sinn eines so genannten Konzeptwechsels (vgl. Strike & Posner 1982). Dieser Ansatz wird vor allem in den Fachdidaktiken naturwissenschaftlicher Unterrichtsfächer favorisiert. Der Einfluss von Alltagswissen und Vorerfahrungen ist dort laut Duit (1996) die wesentliche Bedingungsvariable für Schulleistungen. Es hat sich gezeigt, dass Vorstellungen über Inhaltsbereiche im Sinne von Konzepten relativ stabile Konstrukte darstellen, die sich in vielen Fällen nur schwer verändern lassen. Dabei stehen Alltagswissen und Schulwissen vielfach unverbunden nebeneinander. Dieses Wissen ist zu einem großen Teil situiert. In der Bearbeitung von Aufgaben können damit abhängig vom Kontext unterschiedliche Konzepte aktiv sein (vgl. Schnotz, Vosniadou & Carretero 1999).

1.3 Integration der Sichtweisen

Eine sinnvolle Zuordnung typischer, empirisch begrün-

deter Fehlermuster zu diesen konkurrierenden Erklärungsmodellen ist auf der Grundlage quantitativer Erhebungen nur schwer möglich. Daher werden in der Folge Kriterien formuliert, die dies erleichtern sollen. Hierzu wird der Zusammenhang zwischen den Bearbeitungen unterschiedlicher Aufgaben durch die jeweils gleichen Personen betrachtet. Eine konstruktivistische Perspektive wird dabei neben eine kognitivistisch gestellt, in der Annahme, dass die unterschiedlichen Sichtweisen jeweils eigene Geltungsbereiche aufweisen.

Aus konstruktivistischer Sicht wirken individuelle Vorstellungen über Inhalte als stabile mentale Konstrukte über einzelne Aufgaben hinaus. Damit führen sie nicht nur singular bei einzelnen Aufgaben zu Falschbearbeitungen. Die Bearbeitung unterschiedlicher Aufgaben erfolgt vielmehr insgesamt in sich konsistent, sofern situativ vergleichbare Aufgaben betrachtet werden. Das heißt Schwierigkeiten, die sich aus bestimmten Konzepten ergeben, wirken sich unter Umständen mehrfach aus. Da Vorstellungen abgegrenzte Inhaltsbereiche betreffen, sollten Bearbeitungen von Aufgaben aus anderen Bereichen davon jedoch unabhängig sein. Insbesondere sollte kein Zusammenhang mit dem Bearbeitungserfolg bei anderen Aufgaben erkennbar sein.

Die Erklärung von Fehlern aus kognitivistischer Sicht basiert auf der Verwendung von Schemata, die entweder in sich fehlerhaft sind oder fehlerhaft verwendet werden. In beiden Fällen handelt es sich wesentlich um die Anwendung inadäquaten, prozeduralen Wissens (vgl. van Lehn, 1990). Die fehlerhafte Anwendung von Prozeduren kann sich wiederholt auswirken, wenn auf prozeduraler Ebene ähnliche Anforderungen gestellt sind. Inhaltliche Nähe von Aufgaben allein bedeutet damit nicht notwendig eine Wiederholung von fehlerhaften Bearbeitungen. Mangelnde Kompetenz in der Auswahl und Verifikation von Prozeduren wirkt sich hingegen generell auf die Bearbeitung von Aufgaben aus. Es ist in diesem Fall von einem generellen Zusammenhang mit dem Bearbeitungserfolg anderer Aufgaben auszugehen.

1.3 Empirischer Hintergrund

Verschiedene Untersuchungen haben zeigen können, dass Schüler bei der Bearbeitung von Aufgaben aus dem Bereich Abbildungsgeometrie große Schwierigkeiten haben. So konnten zum Beispiel nur etwa 23% der deutschen TIMSS-III Population erfolgreich eine elementare Konstruktionsaufgabe zur Drehung bearbeiten (vgl. Watermann 2001). Dieser Befund konnte in eigenen Studien repliziert werden (Reiss, Klieme & Heinze 2001). In einem qualitativen Teil unserer Studie zeigte sich insbesondere, dass den beteiligten Abiturienten vielfach kein zur Bearbeitung geeignetes Konzept von Drehung verfügbar war. Lösungsraten von 8% werden in einer Studie von Küchemann (1981) berichtet, in denen 13- bis 15-jährige ebenfalls das Bild einer einfachen geometrischen Figur unter einer Drehung zeichnen sollten. In einer eigenen Studie lag die Lösungsrate bei einer Aufgabe, in der das Bild eines Dreiecks unter einer Halbdrehung gezeichnet werden sollte am Ende der 7. Jahrgangsstufe des Gymnasiums unterhalb von 12%. Diese Studie wird im Folgenden vorgestellt. Dabei werden die Bearbeitungen dieser Aufgabe betrachtet und

vor dem Hintergrund möglicher Sichtweisen auf diese Fehler diskutiert.

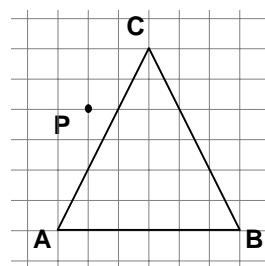
1.4 Ziel der Untersuchung

In dieser Untersuchung werden die Bearbeitungen einer Aufgabe zur Drehung im Kontext der Bearbeitung einer inhaltlich ähnlichen Aufgabe betrachtet. Zudem werden unterschiedliche Bearbeitungskategorien dieser Aufgabe vor dem Hintergrund der individuellen Geometrieleistungen verglichen. Die Zusammenhänge werden mit statistischen Methoden betrachtet. Dabei soll die Frage beantwortet werden, ob es mit einer derartigen Betrachtung möglich ist, empirische Bearbeitungskategorien unterschiedlichen Erklärungshintergründen zuzuordnen. Daraus sollen Rückschlüsse für eine sinnvolle Begegnung typischer Probleme gezogen werden, die in der Bearbeitung von Aufgaben zur Drehung deutlich werden.

2. Darstellung der Untersuchung

2.1 Anlage der Untersuchung

Im Rahmen eines Schulleistungstests haben 371 Schülerinnen und 313 Schüler aus 27 Gymnasialklassen unterschiedliche Aufgaben zur Geometrie bearbeitet ($N=684$). Der Test wurde am Ende der Jahrgangsstufe 7 durchgeführt. Inhalt des Tests waren eine offene Konstruktionsaufgabe zur Halbdrehung, siehe Abbildung 1, sowie eine Aufgabe zu verschiedenen Abbildungen. Bei Letzterer musste zu einem gegebenen Paar aus Figur und Bild die passende Abbildung ausgewählt werden. Die Aufgabe bestand aus Teilen zur Achsenspiegelung, 90° -Drehung und 180° -Drehung. Darüber hinaus umfasste der Test vier Aufgaben zu Basiskompetenzen und sieben Aufgaben zum Argumentieren und Begründen im Bereich der Geometrie. Die Einteilung erfolgte angelehnt an die TIMSS-Kompetenzstufen I/II und III/IV (Klieme 2000). Eine detaillierte Darstellung des verwendeten Testinstruments findet sich in Reiss & Hellmich (i.V.).



Drehe die Figur um den Punkt P um 180° .

Zeichne das Bild!
Beschrifte die Bildfigur!

Abb. 1: Aufgabe zur Drehung

2.2 Deskriptive Ergebnisse

Die Bearbeitungen der Aufgabe zur Drehung wurden auf Grundlage eines Kategoriensystems klassifiziert, das im Rahmen einer Vorstudie erstellt wurde, an der 94 Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 6 teilgenommen haben (Hartmann 2002). Die Benennung der Kategorien sowie die zugehörigen Häufigkeiten sind in

Tabelle 1 dargestellt.

Tabelle 1: Bearbeitungskategorien mit Häufigkeiten

	Häufigkeit	
	absolut	in Prozent
vollständig richtig	78	11,4 %
richtige Konstruktion, leichte Mängel	52	7,6 %
richtige Konstruktion, ohne Bezeichnungen	7	1,0 %
richtige Konstruktion, falsche Bezeichnungen	105	15,4 %
Achsen Spiegelung	82	12,0 %
falsches Drehzentrum	77	11,3 %
falscher Drehwinkel	16	2,3 %
Verschiebung	15	2,2 %
falsch	82	12,0 %
nicht bearbeitet	170	24,9 %

Neben der geringen Anzahl korrekter Lösungen fallen zwei Kategorien auf, die typische Falschlösungen darstellen und die im Rahmen dieses Artikels genauer betrachtet werden: In 82 Bearbeitungen ist die Konstruktion einer Achsen Spiegelung erkennbar, was einem relativen Anteil von 12% entspricht. In 77 Bearbeitungen wurde das Bild des vorgegebenen Dreiecks unter einer Drehung um 180° gezeichnet. Das Drehzentrum ist in diesen Fällen jedoch nicht der gegebene Punkt P. Die Abbildungen 2 und 3 zeigen typische Bearbeitungen, die in diese Kategorien fallen.

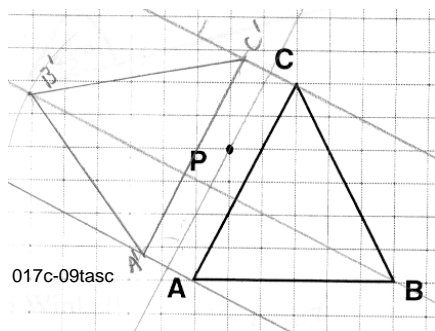


Abb. 2: Konstruktion einer Achsen Spiegelung

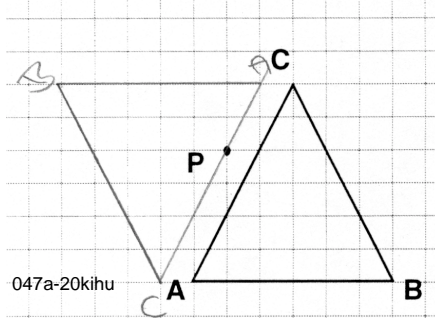


Abb. 3: Falsche Wahl des Drehzentrums

2.3 Auswertung

In einer qualitativen Vorstudie konnte gezeigt werden, dass bei Bearbeitungen, bei denen eine Achsen Spiegelung konstruiert wurde, auf die Vorstellung einer Achsen Spiegelung auch konkret Bezug genommen wurde. In den beobachteten Bearbeitungen kann davon ausgegangen werden, dass Achsen Spiegelung und Achsensymmetrie von Schülern als prototypisch für geometrische

Abbildungen angesehen werden. Die Konzepte anderer geometrischer Abbildungen zeigen sich davon beeinflusst. Daneben sind Bearbeitungen von Konstruktionsaufgaben deutlich von Unsicherheiten in Bezug auf die Verwendung von Prozeduren gekennzeichnet. Zum Beispiel werden Abzählstrategien oft fehlerhaft eingesetzt. Hieraus resultieren zum Teil fehlerhafte Bearbeitungen, die durch eine falsche Lage der Bildfigur gekennzeichnet sind. Zudem kann die Verwendung von Prozeduren inhaltlich nur selten begründet werden. (Hartmann 2002).

Um einen Hinweis darauf zu bekommen, ob sich die Fehler, die den Kategorien *Achsen Spiegelungen* und *falsches Drehzentrum* zugeordnet wurden, hinsichtlich ihres ursächlichen Zustandekommens generell voneinander unterscheiden, werden die eingangs formulierten Kriterien für eine quantitative Auswertung herangezogen. Die Auswertung erfolgt durch die vergleichenden Betrachtung von Teilpopulationen. Die Gruppen *Achsen Spiegelungen* und *falsches Drehzentrum* werden dabei der Gruppe der *Richtigbearbeitungen* gegenübergestellt. Die *Richtigbearbeitungen* umfassen hierbei neben den komplett richtigen Bearbeitungen auch diejenigen mit kleinen Mängeln sowie die richtigen Bearbeitungen ohne Bezeichnung der Bildfigur.

Der Vergleich der Bearbeitungen inhaltlich ähnlicher Aufgaben erfolgt anhand der oben beschriebenen Aufgabe zu unterschiedlichen Abbildungen. Der Bearbeitungserfolg der einzelnen Teilaufgaben wird dabei in Beziehung zu den Teilpopulationen der Aufgabe zur Drehung gesetzt. Eine Varianzanalyse ergibt hier für den Vergleich von *Achsen Spiegelungen* und *Richtigbearbeitungen* einen Haupteffekt für die Teilaufgabe zur Halbdrehung ($F=14,237$, $df=218$, $p<.001$). Es ergibt sich kein Effekt für die Teilaufgaben zur Achsen Spiegelung oder zur 90°-Drehung. Die Bearbeitungen der Konstruktionsaufgabe zur Drehung hängen demnach spezifisch mit der Bearbeitung des Aufgabenteils zur Halbdrehung zusammen. Den Teilpopulationen *falsches Drehzentrum* und *Richtigbearbeitungen* wird ebenfalls die Bearbeitung der einzelnen Aufgabenteile der Aufgabe zu unterschiedlichen Abbildungen gegenüber gestellt. Hier ergibt sich per Varianzanalyse kein Zusammenhang. Der Bearbeitungserfolg der Aufgabe zu unterschiedlichen Abbildungen unterscheidet sich demnach für diese beiden Gruppen nicht systematisch voneinander.

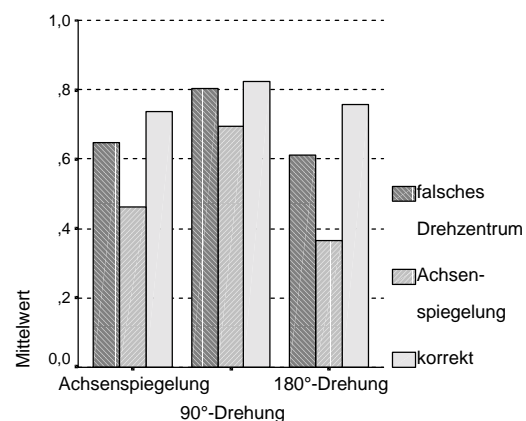


Abb. 4: Mittlerer Bearbeitungserfolg der Mehrfachwahlaufgabe

Abbildung 4 zeigt eine Darstellung des mittleren Bearbeitungserfolgs der einzelnen Aufgabenteile, getrennt nach Teilpopulationen.

Wird die Geometrieleistung dieser Teilpopulationen gegenübergestellt, so zeigt sich, dass sich die Leistungen der *Richtigbearbeitungen* und der *Achsenspiegelungen* voneinander unterscheiden. Die fehlerhafte Bearbeitung der Aufgabe zur Drehung hängt also für die Teilpopulation *Achsenspiegelungen* nicht mit der generellen Geometrieleistung zusammen. Die Leistungen der Gruppe *falsches Drehzentrum* fallen demgegenüber deutlich ab. Dieser Befund erweist sich bei Prüfung mittels T-Test als hoch signifikant ($T=5,722$, $df=212$, $p<.001$). Der Unterschied fällt mit einer Effektstärke von $d=.77$ (Cohen) sehr deutlich aus. Für diese Gruppe zeigt sich also ein Zusammenhang zwischen der fehlerhaften Bearbeitung der Aufgabe zur Drehung und mangelnder Geometrieleistung insgesamt. Die Geometrieleistung ergibt sich in diesem Fall als Summenscore der einzelnen Teilaufgaben unter Auslassung der beiden hier betrachteten Aufgaben zu Abbildungen. Die mittleren Geometrieleistung innerhalb der Teilpopulationen ist in Abbildung 5 dargestellt. Die maximal erreichbare Leistung ist in dieser Darstellung auf eins normiert.

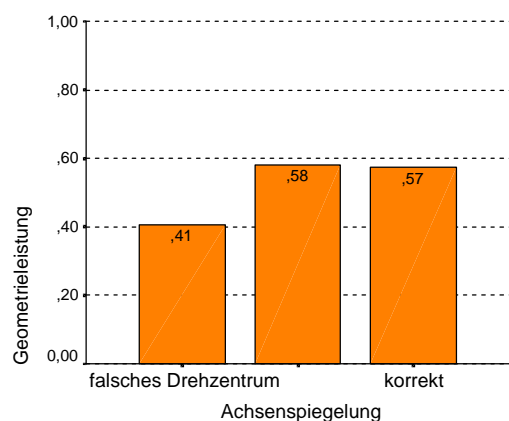


Abb. 5: Mittlere Geometrieleistung der Teilpopulationen

3. Diskussion

Konstruktionsaufgaben zur Drehung erweisen sich in der Praxis vielfach als sehr schwierig. Die Fähigkeit zur Bearbeitung solcher Aufgaben ist bei Schülerinnen und Schülern unterschiedlichster Populationen nur ungenügend vorhanden. Dabei stellen diese Aufgaben, verglichen mit den Anforderungen in anderen Bereichen des Mathematikunterrichts, inhaltlich keine besonderen Schwierigkeiten dar.

Die hier dargestellten Befunde zeigen, dass die Probleme, die bei der Bearbeitung dieser Aufgaben eine Rolle spielen, von grundsätzlich unterschiedlicher Natur sind. In der statistischen Auswertung ergeben sich für die beiden Bearbeitungskategorien *falsches Drehzentrum* und *Achsenspiegelungen* verschiedenartige Zusammenhänge, die auf grundverschiedene Erklärungsmodelle deuten. Sie weist im Kontext des bearbeiteten Geometrietests in dem einen Fall auf Zusammenhänge, die mit einer kognitivistischen Sicht korrespondieren, im anderen Fall passen sie in ein Bild, das aus einer konstruktivistischen Sicht zu erwarten ist.

Aus kognitivistischer Sicht sind die Bearbeitungen, bei denen das gegebene Dreieck um einen anderen als den vorgegebenen Punkt gedreht wurde, durch die Verwendung inadäquater Schemata zu erklären. Fehlerhafte Abzählprozeduren zur Bestimmung der Lage der einzelnen Bildpunkte können hier zu einer solchen Bearbeitung führen. Ebenso kann auch ein ungeeignetes Schema zur Drehung Ursache sein, wenn berücksichtigt wird, dass im Unterricht in vielen Aufgaben das Drehzentrum Teil der zu drehenden Figur ist. Diese unzulässige Verallgemeinerung kann als Übergeneralisierung ebenfalls zu einer derartigen Bearbeitung führen. So spiegeln sich hier grundsätzliche Probleme wieder, die für den Umgang mit Mathematikaufgaben typisch sind. Häufig bestehen Unsicherheiten auf prozeduraler Ebene, aus denen heraus falsche oder fehlerhafte Prozeduren innerhalb der Bearbeitung von Aufgaben angewendet werden. Das hängt insbesondere mit einem mangelnden Repertoire an Kontrollstrategien und Metawissen zusammen.

Eine konstruktivistische Sicht weist dagegen auf andere Zusammenhänge. Die Bearbeitung der Aufgabe in Form der Konstruktion einer Achsenspiegelung ist vor dem Hintergrund eines Einflusses von Konzepten und Vorstellungen zu erklären, die ihren Ursprung in den Vorerfahrungen von Schülerinnen und Schülern haben. Im Bereich geometrischer Abbildungen zeigt sich eine Dominanz der Achsenspiegelung. Diese wird im Unterricht der Grundschule und Orientierungsstufe prototypisch für geometrische Abbildungen behandelt. Darüber hinaus haben alltägliche Erfahrungen mit Spiegelungen Einfluss und insbesondere auch der umgangssprachlich synonym mit achsensymmetrisch verwendete Begriff der Symmetrie. Die Vorstellungen, die mit dem Konzept der Drehung verbunden sind, können daher davon geprägt sein, die gegebene Figur ‚passend‘ abzubilden, wobei im Fall einer Halbdrehung die prototypisch angesehene Abbildung der Achsenspiegelung zu einem ‚stimmigen‘ Ergebnis führt.

In der Summe lassen sich darin Forderungen an den Unterricht erkennen, die den Ursachen beider Phänomene entgegenwirken können. So sollten generell tragfähige und klare Vorstellungen über die behandelten mathematischen Inhalte vermittelt werden. In diesem Zusammenhang sind sicherlich ‚fundamentale Ideen‘, ‚big ideas‘ und ‚Grundvorstellungen‘ wegweisend. Die Vermittlung von Vorstellungen sollte dabei zum einen mit der Betrachtung von Metawissen und übergeordneten Problemlösestrategien einhergehen, um Schülerinnen und Schüler zu einer eigenständigen Verifikation ihrer Bearbeitungen zu befähigen. Zum anderen sollten aber die Forderungen, die aus konstruktivistischer Sicht an (Mathematik-)Unterricht gestellt werden stärker ins Bewusstsein rücken und insbesondere die Ideen und Ansätze der Conceptual-Change-Theorie Berücksichtigung finden. Grundlegend ist dabei die Sicht von Strike und Posner (1982), die es für eine Veränderung von Konzepten für notwendig halten, dass Schülerinnen und Schüler mit ihre bisherigen Konzepten unzufrieden sind, weil sie sich als unzureichend erweisen. Demgegenüber müssen die im Unterricht angebotenen Konzepte verständlich und plausibel sein und sich in verschiedenen

Situationen als fruchtbar erweisen, in denen die bisherigen Konzepte scheitern. Daraus lässt sich insbesondere folgern, dass nur solche Inhalte dauerhaft gelernt werden, die den Lernenden sinnhaft erscheinen. Dies misst sich daran, ob den Lernenden Situationen und Probleme begegnen, in denen das Gelernte sinnvoll angewendet kann.

Literatur

- Greer, B.; Verschaffel, L. (1990): Introduction. - In: International Journal of Educational Research, 14, S. 3-12.
- Hartmann, J. (2002): Students' conceptions concerning rotations, an investigation. Internes Arbeitspapier - Oldenburg: Universität, Fachbereich Mathematik. Eingereicht bei: Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Hatano, G. (1996): A conception of knowledge acquisition and its implications for mathematics education. - In: L.P. Steffe; Neshet, P.; Cobb, P.; Goldin, G.A.; Greer, B. (Hg.), Theories of Mathematical Learning. Mahwah, NJ: Erlbaum, S. 197-217.
- Haussmann, K.; Reiss, M. (1990): KASIMIR: Die Modellierung einer iterativen Strategie beim Lösen eines rekursiven Problems. - In: K. Haussmann; M. Reiss (Hg.), Mathematische Lehr-Lern-Denkprozesse. Göttingen: Hogrefe. S. 131-151.
- Klieme, E. (2000): Fachleistungen in voruniversitären Mathematik- und Physikunterricht. Theoretische Grundlagen, Kompetenzstufen und Unterrichtsschwerpunkte. - In: J. Baumert; W. Bos; R. Lehmann (Hg.): TIMSS/III. Band 2. Opladen: Leske + Budrich, S. 57-128.
- Küchemann, D. (1981): Reflections and rotations., - In: K.M. Hart (Hg.), Children's Understanding of Mathematics: 11-16, London: John Murray.
- Malle, G. (1994): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. - Braunschweig: Vieweg.
- Reiss, K.; Hellmich, F.; Thomas, J. (i.V.). Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht. - Eingereicht bei: Zeitschrift für Pädagogik.
- Reiss, K.; Klieme, E.; Heinze, A. (2001): Prerequisites for the understanding of proofs in the geometry classroom. - In: Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, S. 97-104.
- Reiss, K.; Reiss, M. (1995): Aspects of acquiring iterative structures in computer programming. - In: K.F. Wender; F. Schmalhofer; H.D. Böcker (Hg.), Cognition and computer programming. Norwood, NJ: Ablex Publishing, S. 219-239.
- Schnotz, W.; Vosniadou, S.; Carretero, M. (Hg.) (1999): New Perspectives on Conceptual Change. - Oxford: Elsevier.
- Strike, K.A.; Posner, G. (1982): Conceptual change and science teaching. - In: European Journal of Science Education, 4, S. 231-240.
- Van Lehn, K. (1990): Mind bugs: The origins of procedural misconceptions. - Cambridge, MA: MIT Press.
- Watermann, R. (2001): Diskrete Latent-Trait-Modelle zur Prüfung von Stufenmodellen Eine Reanalyse von Aufgaben zur euklidischen Geometrie aus der TIMS-Abiturientenstudie. - URL <http://www.timss.mpg.de/Literatur/Kompetenzstufen.pdf>

Autor

Hartmann, Jens, Fachbereich Mathematik, Carl von Ossietzky
Universität Oldenburg, D-26111 Oldenburg
Email: jens.hartmann@uni-oldenburg.de