

Schumann, H.:

## Raumgeometrie – Unterricht mit Computerwerkzeugen

Berlin: Cornelsen 2001 – 218 p.  
ISBN 3-464-54182-7

Bauer, H.; Freiberger, U.; Kühlewind, G.; Schumann, H.:

## Körpergeometrie (Software)

Berlin: Cornelsen 1999  
ISBN 3-464-90911-5

Hans Schupp, Saarbrücken (Germany)

Die gemeinsame Rezension ist angebracht, weil sich das Buch fortwährend (allerdings nicht ausschließlich) auf die Software bezieht und auf einer anfänglichen „Tour“ in deren Benutzung einführt.

Im folgenden werden die Kapitel des Buches einzeln vorgestellt und kritisch betrachtet, bevor dann eine Gesamtwürdigung versucht wird.

### 1 Computergraphische Werkzeuge für den Raumgeometrie-Unterricht in der Sekundarstufe I

Zu Beginn erläutert der Autor, welche Möglichkeiten eines erweiterten, progressiven Konstruierens sich durch Hinzunahme einer computerrepräsentierten gegenüber der traditionellen, materialrepräsentierten oder mit Papier und Bleistift betriebenen Raumgeometrie ergeben, aber auch, welche Schnittstellenprobleme sich dabei auftun. Im Vorgriff auf eine dreidimensionale DGS (räumliches Konstruieren à la CABRI, EUKLID, CINDERELLA, ...), deren Realisierung noch auf sich warten läßt, empfiehlt er eine auf die Behandlung vorgegebener geometrischer Körper bezogene und auf gegenwärtige SI-Lehrpläne ausgerichtete Software, die es gestattet

- mit den Standardkörpern des dortigen Geometrieunterrichts so umzugehen, als hätte man sie „in der Hand“
- vom Bildschirm her den Übergang zur taktilen Wahrnehmung der Körper (etwa durch Ausdrucken von zuvor konstruierten Netzen) zu leisten
- direkte und indirekte Messungen an Körpern vorzunehmen, auch unter Darstellung von Körperstrecken und –flächen in wahrer Form
- in gegebene Körper weitere Figuren einzuzeichnen und aus gegebenen Körpern weitere Körper herzustellen.

Die o.a. Tour dient sodann dazu, am Beispiel einer quadratischen Pyramide aufzuzeigen, daß die vom Autor mitentwickelte Software diesen Ansprüchen genügt. Es werden behandelt

- die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von Körpern (Perspektiven, Projektionen, Netze)
- ihre möglichen Abbildungen (Drehung, Spiegelung) und Deformationen (durch einen räumlichen Zug-Modus)
- das Bestimmen ihrer metrischen Eigenschaften

- das Einzeichnen von Körperpunkten, -strecken und -flächen
- das Bestimmen von Schnittebenen, Teilfiguren, zusammengesetzten Figuren
- das mögliche Abändern vorgegebener Körper sowie der Bau eigener Grundkörper (allerdings nur über Koordinaten und daher etwas mühsam) mit vielerlei Optionen und Kombinationen.

Das Kapitel schließt mit dem Aufzeigen von Grenzen der Software (z.B. keine Möglichkeit des Umdefinierens veränderter Grundkörper zu neuen Grundkörpern, eingeschränkter Zug-Modus (nur an Grundkörpern und auch dort nur in Achsenrichtungen), keine Möglichkeit des Bezeichnen von geometrischen Objekten und des textlichen Erläuterns von Konstruktionen, keine Undo- und Redo-Option) sowie mit einem Hinweis auf offene Fragen und Weiterentwicklungen (z.B. Agieren im virtuellen Raum, Änderungen in der Zielsetzung des Unterrichts in Raumgeometrie und vielleicht auch in der Erfassung der dreidimensionalen Wirklichkeit).

Die Software ist (eingeständenermaßen) gewöhnungsbedürftig (und auch nicht völlig absturzsicher). Die „Tour“ allein, so sehr sie geeignet ist, auf die Möglichkeiten des räumlichen Agierens an und mit den Grundkörpern exemplarisch hinzuweisen, reicht nicht aus. Dem Leser sei empfohlen, Paralleltouren mit anderen Körpern vorzunehmen und bei Schwierigkeiten das mitgelieferte Handbuch (es ist besser als die online-Hilfe) heranzuziehen.

Hat man die Anfangsschwierigkeiten erst einmal überwunden, erkennt man aber deutlich, welche vielfältigen Chancen diese Software für eine Intensivierung der durchweg vernachlässigten Raumgeometrie bietet. Dazu trägt in hohem Maße die vom Buchautor gewählte und sachkundig kommentierte Sequenz der Manipulationen an der quadratischen Pyramide bei. Daß bei der Rahmgebung nicht weiter auf Ziele und Prinzipien eines heutigen Raumlehreunterrichts eingegangen wird, erscheint angesichts der diesbezüglichen Expertenkonkordanz vertretbar; eher vermißt man schon ein durchziehendes Eingehen auf das unterrichtliche Zusammenspiel der o.a. drei medienspezifischen Handlungsweisen.

### 2 Offene Aufgaben: Schnittkörperbildung

Am Beispiel des Erzeugens von Schnittkörpern wird gezeigt, wie man mit dem neuen Werkzeug offene Aufgaben stellen und von deren bekannten Vorteilen profitieren kann. Auch dieses Beispiel ist glücklich gewählt. Einmal sind Schnitte an Körpern unumgänglich, um sie wirklich kennenzulernen, zum anderen sind hierbei herkömmliche Körpermodelle deutlich unterlegen. Die bereitgestellten Aufgaben (welche die Benutzer(innen) ohne Mühe erweitern und vermehren können) sind nicht alle gleich wertvoll. Während Würfelhalbierungen, Würfelmetamorphosen und generell die Erzeugung von archimedischen aus platonischen Körpern Inhalte der traditionellen Raumgeometrie aufnehmen und sinnvoll weiterführen, kann das Herstellen und Beschreiben von Tetraederteilkörpern und –derivaten angesichts des Zeitaufwandes zu wenig

gedankliche Herausforderungen bieten.

### 3 Die platonischen Körper in dynamischen Bilderbögen

„In Bilderbögen“ heißt, daß kein Text beigegeben ist. Und „dynamisch“, daß es stets um Sequenzen vom Tetraeder bis zum Ikosaeder geht. Hierbei werden die Möglichkeiten der Software konsequent benutzt. Die fünf platonischen Körper stehen als Grundformen zur Verfügung (daß es keine weiteren gibt, bedarf (glücklicherweise) einer computerabgewandten Überlegung), sie werden auf unterschiedliche Weise (Parallel- und Zentralprojektion, nackt, farbig, beleuchtet, mit ihren Bestandteilen, Netzen und Mittelpunktschnitten) betrachtet, miteinander in Verbindung gebracht (Herstellungsreihen) und erweitert (Sternkörper). All das fordert geradezu auf, diese und analoge Bilder selbst zu erzeugen sowie die dazu erforderlichen Überlegungen anzustellen.

### 4 Generierung von Körperpuzzles

Der Autor beschreibt zu Beginn dieses Kapitels, welchen didaktischen Sinn der Umgang mit solchen Puzzles und ihr Herstellen mittels Software hat. Insbesondere weist er auf das hierin beschlossene Kreativitätstraining hin. Die Skepsis des Rezensenten hat er weder damit noch mit dem nachfolgenden Beispiel (Tetraeder-Puzzles) verringern können. „Bildschirmpuzzles“ mit gerade hergestellten Teilkörpern laufen auf bloßes Rückgängigmachen oder Probieren hinaus, nichttriviale materiale Puzzles erfordern hohen technischen Aufwand (Herstellen mehrerer Netze, jeweils Anbringen von Klebefalzen, Auffalten und Zusammenkleben) und bieten dennoch wenig intellektuellen Anreiz.

### 5 Formenkunde: Vom Würfel zum Parallelogramm

Anders hier. In Analogie zum Quadrat, das mittels der beiden Strategien „Seitenlängenabänderung“ und „Winkelmaßabänderung“ zum „kleinen Haus der Vierecke“ führt, kann, vom Würfel ausgehend, untersucht werden, welche Zwischenformen auf dem Weg zum allgemeinen Parallelogramm (mit viereckiger Grundfläche) liegen. Der systematische Gebrauch der beiden Strategien (on-line) ermöglicht ein übersichtliches Diagramm (off-line), welches u.a. auf eventuelle Lücken bzw. auf unmögliche Körper aufmerksam macht. Auf Invarianzuntersuchungen in Weiterführung der Analogie zu Vierecken wird hingewiesen, aber nicht näher eingegangen. Schade, denn auch dabei wird der Unterschied zur Formenkunde alten Schlages (isoliertes Betrachten einzelner Körper und einzelner Merkmale) offenbar.

### 6 Automatisches Verräumlichen ebener Figuren

Es ist bekannt, daß viele Menschen erhebliche Schwierigkeiten haben, räumliche Konfigurationen aus deren ebenen Darstellungen zu rekonstruieren (z.B. ihr geplantes Wohnhaus aus Grund- und Aufriß). Darum sollte der Geometrieunterricht zusammen mit dem „Verebnen“ auch dessen Umkehrung, das

„Verräumlichen“ aufgreifen. Der Autor bedauert zu Recht, daß es noch keine Software gibt, die sich diesem Ziel umfassend widmet. Er geht daher auf mehrere Programmpakete (NETS, CAD-3D, HOME DESIGN 3D, BAUWAS) ein, die wenigstens einzelne Möglichkeiten gestatten. Für die KÖRPERGEOMETRIE erläutert er das (sofortige oder schrittweise) Erzeugen von Rotationskörpern aus deren Profil.

All dies geschieht – wie nun schon gewohnt – recht sorgfältig, mit überzeugenden Beispielen und mit beeindruckenden Zeichnungen. Ob allerdings der automatische Übergang von der euklidischen zur elliptischen Geometrie, wie ihn CINDERELLA gestattet, hierher gehört, erscheint zweifelhaft; auch die Kugelgeometrie ist eine (Ober)Flächengeometrie und entsteht gerade nicht durch das Verräumlichen ebener Sachverhalte.

### 7 Orientierung auf dem virtuellen Globus

Hingegen wird man zustimmen, wenn es heißt (S. 147): „Im Zeitalter der ‚Globalisierung‘, das auch durch den internationalen Flugverkehr geprägt ist, gehört eine entsprechende mathematische Orientierung auf dem Globus zum Bildungskanon des weltoffenen Bürgers.“ Und mit dem Autor bedauern, daß die Kugelgeometrie/Sphärische Trigonometrie kaum noch in unseren Lehrplänen auftritt. Möglicherweise war auch daran schuld, daß der mathematische Globus als Medium nicht genügt. Am Beispiel der Software SPHÄRI wird klargemacht, daß und wie computergraphische Hilfen diesem wichtigen Kapitel erneute Bedeutung und Aktualität verschaffen können.

### 8 Computerunterstütztes Lösen raumgeometrischer Berechnungsaufgaben

Solche Aufgaben gehören seit Jahrhunderten zum ehernen Bestandteil der schulischen Raumgeometrie, ja machen ihn vielfach fast vollständig aus. Geometrische Probleme werden durchweg arithmetisiert; es dominiert (wie später in der Analytischen Geometrie) der relativ gut leist- und prüfbare Kalkül. Der Autor hofft, diese Verzerrung dadurch rückgängig machen zu können, daß der Kalkül durch geeignete Software automatisiert und dadurch trivialisiert werden kann, so daß statt der Zahl wieder die Form in den Mittelpunkt des Geometrie-Unterrichts rückt.

Hierbei unterscheidet er das computergraphische vom computeralgebraischen Lösen und dort wiederum die Simulations- von der Ansatzmethode.

Beim computergraphischen Lösen macht man sich zunutze, daß die Software (jetzt wiederum KÖRPERGEOMETRIE) zahlreiche Möglichkeiten des maßgerechten Konstruierens und Messens konstruierter Objekte bietet, so daß eine Näherungslösung stets möglich wird. Deren Güte ist wegen der Pixelgraphik beschränkt (in der gewerblichen Praxis genügen allerdings gute Näherungen durchaus), doch beeindruckt der anschaulich-experimentelle Zugang. Die Simulationsmethode läßt den üblichen Lösungsprozess unverändert, übergibt jedoch alle arithmetisch-algebraischen Teile dem Computer (hier z.B.: DERIVE).

Bei der Ansatzmethode werden die Gleichungen zusammengestellt, die von den gegebenen über Hilfsgrößen zu den gesuchten Größen führen, weiterhin die gesuchten Größen und schließlich die zu eliminierenden Hilfsgrößen. Alles Andere erledigt dann die Software (hier: MATHEMATICA).

Der Autor plädiert für eine computerunterstützte Gesamtbehandlung von Berechnungsaufgaben und schlägt eine Reihenfolge „graphisches Lösen → simulatives Lösen → ansatzorientiertes Lösen“ vor, die durch zunehmende Abstraktion gekennzeichnet ist. (Daß das traditionelle „händische“ Lösen über Formeln, Formelumstellungen, Zerlegen und Ergänzen vorangeht, erscheint ihm wohl selbstverständlich.) Es folgen einige Aufgabenbeispiele, an denen die vorausgegangenen Ausführungen und Bewertungen erläutert werden.

Bei grundsätzlicher Zustimmung zu diesem Kapitel und auch zu den meisten Details bleibt eine Sorge, welche vor allem die beiden computeralgebraischen Methoden betrifft. Sie sind weder technisch noch gedanklich ohne weiteres zu handhaben. Könnte es nicht sein, daß ein diesbezügliches Training erneut, diesmal auf andere Weise, vom geometrischen Gehalt des jeweiligen Problems ablenkt? Daß Aufgaben aus der Geometrie schließlich nur noch dazu dienen, mit dem Computer zu kommunizieren? Leider trägt der Autor (natürlich ungewollt) selbst ein wenig zu einer solchen Entwicklung bei, wenn er in seinen Beispielen sog. „Umkehraufgaben“ (Volumen und Oberfläche eines Körpers gegeben, Einzelmaße gesucht) favorisiert, die (von seltenen Situationen abgesehen, in die sie dann aber auch eingebettet werden sollten) geometrisch wenig Sinn machen.

### 9 Anwendungen des Prinzips von Cavalieri in computergraphischer Darstellung

Wie die in der SI (also vor der Analysis) obligatorischen, exakt indessen nur infinitesimal erreichbaren Volumenformeln von Pyramide, Kegel und Kugel erarbeitet werden sollten, ist eine alte Streitfrage. Der Autor bedauert, daß gemäß einiger neuerer Lehrpläne auf entsprechende Herleitungen ganz verzichtet werden soll, und plädiert für die historisch-genetische Cavalieri-Methode. Er zeigt, daß man mit ihr alle auftauchenden Schwierigkeiten überwinden (und sie später, in der Analysis, nachträglich sichern (H.Sch.)) kann. Die Bildschirmvisualisierung entsprechender Einsichten und Verfahren kann man mit der Software CAVALIER angehen, welche das fortgesetzte Verändern von Anzahl und Höhe der prismatischen Hilfsschichten sowie das synchrone standebenenparallele Durchfahren der zu vergleichenden Körper erlaubt. (Entsprechende materiale Demonstrationen mit Büchern, dann Heften und schließlich Seiten sollten dennoch nicht fehlen.)

Ein Kapitel, dessen Zielen und Vorgehensweisen man weite Verbreitung wünscht.

### 10 Medienspezifische Lösungsmethoden für eine raumgeometrische Extremwertaufgabe

Hier geht es um einen wertenden Vergleich unterschiedlicher Methoden der Extremwertbestimmung

ohne und mit Software, und zwar am Beispiel der Aufgabe, das maximale Volumen eines Kegels bei gegebener Mantellinie zu bestimmen. Es werden aufgeführt und angesetzt: Papier(tüten)modell, Tabellenkalkulation, Funktion und Graph, interaktives Arbeitsblatt, Computer-Numerik, Computeralgebra, exakte nichtinfinitesimale Lösung (über die verallgemeinerte Mittel-Ungleichung), Differenzmethode nach Schellbach; ein beeindruckendes Arsenal, das der Autor daraufhin kritisch sichtet, wie weit der Schüler / die Schülerin selbst (heuristisch und verifizierend) aktiv werden kann und Einsichten über die bloße Ergebniszahl hinaus gewinnt.

Erfreulich, daß er dem Leser die Entscheidung für seinen Unterricht nicht abnimmt, sondern mehrere Wege mit unterschiedlich intensivem Computereinsatz aufzeigt. Der Rezensent neigt hier zu den gut verständlichen numerischen Verfahren und zur exakten algebraischen Lösung, weil sie durchsichtig und vielfältig anwendbar sind. Bei den numerischen Verfahren sollte man das eigenständige Programmieren elementarer Extremwertbestimmungen nicht vergessen; warum nur ist das Entwerfen und Realisieren von einfachen Algorithmen so völlig „aus der Mode“ gekommen?

### Anhang

Hierin werden – über den Geometrieunterricht hinaus – Probleme bei der Nutzung von Computerwerkzeugen angesprochen, denen sich die Mathematikdidaktik in den nächsten Jahren widmen muß.

### Gesamtkritik

Während längst feststeht, daß die DGS die ebene Schulgeometrie bereichern kann und attraktiv macht, stehen computergraphische Hilfen für den Unterricht in Raumgeometrie noch in den Anfängen, was nicht weiter verwundert angesichts der traditionellen und der neuen, medienspezifischen Schwierigkeiten beim Umsetzen räumlicher Beziehungen und Aktivitäten in ebene Darstellungen. Insofern kommt der zu rezensierenden Software Pioniercharakter zu. Auch wenn in ihr der inzwischen hohe technische Standard der ebenen DGS noch nicht erreicht wird, bietet doch sie eine Fülle von Möglichkeiten, die sich im Unterricht umsetzen lassen und geeignet sind, raumgeometrische Vorstellungen und Strategien zu fördern.

Daß nun einer ihrer Konstrukteure, ein seit Jahren ausgewiesener Experte auf dem Gebiet des computerunterstützten Geometrie-Unterrichts, unternommen hat, in Wege und Prinzipien des schulischen Einsatzes von geeigneter 3D-Software einzuführen, ist wichtig und wertvoll.

Wichtig, weil man sonst wohl kaum die dargebotenen Chancen für eine Belebung auch bereits des noch traditionsgebundenen Raumlehreunterrichts genügend deutlich erkennen wird; und wertvoll, weil der Autor nicht additiv, sondern integrierend, nicht auftrumpfend, sondern umsichtig vorgeht, mit Blick auch auf die Vorläufigkeiten und Grenzen des neuen Mediums.

Wer mit seinen Hinweisen und Hilfen in den Unterricht geht, hat noch genügend zu tun. Ganz sicher muß er (oder

sie) bei der Breite des Angebots auswählen, didaktisch vor- und nachbewerten (wobei er, wie der Rezensent, lokal durchaus auch anders gewichten kann), und nicht zuletzt zusehen, wie er das neue Medium in die keineswegs arme raumgeometrische Medienlandschaft sinnvoll einfügt. Aber dazu wird er bestens vorbereitet und ausgerüstet.

Bleibt noch zu erwähnen, daß das Buch mit seinen vielen (trotz Einfarbigkeit) attraktiven Figuren, seinem wohlgestalteten Text und seiner guten Ausstattung auch äußerlich gelungen erscheint.

---

**Autor**

Schupp, Hans, Prof. Dr., Universität des Saarlandes, Fakultät 6,  
Postfach 151150, D-66041 Saarbrücken