

Müller, Kurt Peter:

## Raumgeometrie Raumphänomene – Konstruieren – Berechnen

Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden: Teubner 2000. – 171 S.  
ISBN 3 – 519 – 02397 – 0

Wolfgang Kroll, Marburg

### 1. Allgemeine Einordnung

Das Buch ist in der Reihe *mathematik-abc für das Lehramt* erschienen. Das Kürzel ist dabei nicht (nur) bildlich gemeint, sondern steht als Akronym für „Algebra und Analysis, Bilder und Geometrie, Computer und Anwendungen“. „In diesen drei Bereichen“, heißt es dazu programmatisch auf dem Vorsatzblatt „werden Standardthemen der mathematischen Grundbildung gut verständlich behandelt, wobei Zielsetzung, Methoden und Schulbezug des behandelten Themas im Vordergrund der Darstellung stehen“. Bedenkt man, welch geringen Stellenwert die Raumgeometrie in der didaktischen Forschung und Praxis einnimmt – eine nur kursorische Durchsicht der „Beiträge zum Mathematikunterricht“ von 1991 bis 2000 zeigt, dass sich höchstens 5 % der Artikel in irgendeiner Form mit raumgeometrischen Fragen beschäftigen – so mag es wohl überraschen, wenn die Raumgeometrie hier unter den „Standardthemen der mathematischen Grundbildung“ erscheint. Andererseits ist es gerade dieser Umstand, der dem Buch unbeschadet einer möglichen Detailkritik seinen besonderen Wert verleiht. Denn Raumgeometrie gilt trotz ihrer landauf, landab zu beobachtenden Vernachlässigung unwidersprochen als wichtiges, vor allem auch *allgemeinbildendes* Gebiet der Schulmathematik. Dementsprechend müsste die Frage, wie angehende Lehrer auf die Aufgabe, Raumgeometrie in der Schule zu unterrichten, vernünftig vorbereitet werden können, eine viel größere Rolle in der Didaktik spielen, als es tatsächlich der Fall ist. In dieser Situation bietet das Buch von Müller einen hervorragenden Anstoß, um die Diskussion über die Raumgeometrie systematisch aufzunehmen und dabei zu klären, über welche professionell verwendbaren Kompetenzen zukünftige Lehrer verfügen sollten.

Müllers Buch selbst ist jedoch keine Didaktik und noch weniger ein Leitfaden für den Unterricht. Es ist ein Lehrbuch für Lehramtskandidaten der Primarstufe und der Sekundarstufe I, das im Einklang mit den Zielsetzungen der ABC-Reihe den Studierenden die „wesentlichen fachlichen Inhalte“ nahebringen will. Den Computer spart Müller dabei völlig aus, „weil“, wie er schreibt, „die Entwicklung bei den einschlägigen Programmen noch zu schnell vor sich geht“ (S. 6). Ich halte das für einen Vorzug des Buches, weil so der Blick auf die Gegenstände und Themen einer raumgeometrischen Grundbildung unverstellt bleibt. Die Frage, was ein Computer kann oder nicht kann, mag dann getrost auf einer zweiten Ebene diskutiert werden.

An Vorkenntnissen wird nicht mehr vorausgesetzt, als sie ein Abiturient mitbringen sollte. Im Grunde sogar

weniger. Denn die Strahlensätze, der Sinus- und Kosinussatz, der Satz von Pythagoras (als Beispiel für einen Flächensatz) werden – zum Teil mit Beweisen – in knapper Form vorgeführt und die Grundtatsachen der Flächen- und Raummessung ebenfalls (sehr gedrängt) dargestellt. Dabei findet neben dem Cavalierischen Prinzip auch Integralrechnung Verwendung. Die Vektorrechnung kommt dagegen im ganzen Buch nicht vor, und Formeln aus der Analytischen Geometrie tauchen nur sehr spärlich auf. Man darf infolgedessen davon ausgehen, dass die wiederholenden Teile des Buches vornehmlich dazu gedacht sind, das *Norm- und Prüfungswissen* bereitzustellen, das ein Mathematiklehrer für die Sekundarstufe I (unter anderem) beherrschen sollte. Denn durch „die Beschränkung auf die wesentlichen fachlichen Inhalte und die Erläuterungen anhand von Beispielen und Aufgaben“, lässt uns das Programm der ABC-Reihe ebenfalls wissen, soll es dem Leser erleichtert werden, sich nicht nur im Selbststudium neue Inhalte anzueignen, sondern sich auch „zur Prüfungsvorbereitung konzentriert mit dem nötigen Rüstzeug zu versehen“. Aus dieser Formulierung geht klar hervor, dass sich Müllers Buch wie die ganze Reihe vornehmlich an Studierende des Lehramts wendet. Es ist zweifellos aus der Perspektive eines Hochschullehrers geschrieben, der seinen Hörern einen schriftlichen Leitfaden an die Hand geben will, weil einschlägige Lehrbücher, auf die er verweisen könnte, fehlen.

### 2. Aufbau und Konzeption des Buches

Müllers „Raumgeometrie“ ist wie alle Bände der ABC-Reihe nach einem „Zwei-Seiten-Konzept“ aufgebaut. Links werden die fachlichen Gegenstände systematisch dargestellt, auf den gegenüberliegenden rechten Seiten durch Beispiele erläutert und durch Aufgaben ergänzt. Ausführliche Lösungshinweise zu allen Aufgaben finden sich am Schluss des Buches. Das mathematische Grundwissen wird in Sätzen und Definitionen gefasst, die in jedem der fünf Kapitel getrennt voneinander durchnummeriert sind. Dadurch, dass auch die Beispiele und Aufgaben in der gleichen Weise unabhängig voneinander gezählt werden, muss man beim Nachschlagen vier verschiedene Kategorien unterscheiden, was zuweilen etwas verwirrend sein kann. Generell ist festzustellen, dass die Zahl der Aufgaben relativ klein ist. Für ein „learning by doing“, dem sich die Bände der ABC-Reihe laut Programm besonders verpflichtet fühlen, geben sie jedenfalls nur eine sehr schmale Basis ab.

Die grundlegende *didaktische Idee*, auf der Müller sein Buch aufbaut, ist, die fachlichen Inhalte soweit wie möglich an *Dachformen* zu exemplifizieren. Er begründet dies einerseits damit, „dass man praktisch alle geometrischen Phänomene an geeignet gewählten Dächern entdecken kann“ (S. 5), und dass andererseits Mathematik und besonders die Geometrie für die Schule nicht vorrangig ein Kulturgut sei oder „gar der Bereich, in dem logisch gedacht werden muss“, sondern „ein Gebiet, das viele Anwendungen im Alltagsleben hat“ (ebda.). Man muss sich mit dem Autor über die hier – auch nur „nebenbei“ – getroffene Kategorisierung der Mathematik nicht einig sein um festzustellen, dass der Gedanke, die Raumgeo-

metrie in einem festen erfahrungsweltlichen Kontext einzubetten, durchaus einleuchtet. Die Ausführung zeigt, dass dies fast durchgehend möglich ist, ohne dass das Vorgehen etwa aufgesetzt oder unsachgemäß erscheint.

In einem Buch, das eine Einführung in die (elementare) Raumgeometrie zum Ziel hat, spielen Zeichnungen naturgemäß eine große Rolle. Dabei nimmt Müller eine Stufung vor, die er in seiner Darstellung, oft „unterschwellig“, wie er sagt, befolgt, ohne dies jedesmal explizit zu machen, nämlich (vgl. S. 5f):

- Zeichnungen lesen und vor allem auch *dynamisch* interpretieren;
- Zeichnungen ergänzen mit dem Ziel, sich *kontinuierliche Veränderungen* besser vorstellen zu können und neue Erkenntnisse zu gewinnen;
- Zeichnungen erstellen, aber nicht um die zahlreichen Standardverfahren der darstellenden Geometrie einzüben, sondern um *grundlegende Ideen* bereitzustellen, die sich vor allem auch beim *Skizzieren* nutzen lassen.

Als vierte, unbedingt notwendige Stufe, die sich dem anschließen müsste, nennt Müller das *Bauen von Modellen* und bedauert zugleich, dass sie „im Rahmen einer solchen Darstellung in Buchform kaum umgesetzt“ (S. 6) werden kann. Hier fällt es schwer, dem Autor zu folgen. Denn wenn man die Bedeutung von Modellen so hoch einschätzt, dann wäre es ja immerhin möglich, an den entsprechenden Stellen wenigstens darauf hinzuweisen. Im Buch selbst wird das Bauen von Modellen nur an drei Beispielen ausführlicher beschrieben (S. 102 ff.).

Müller führt noch eine fünfte Stufe an, *Berechnungen*, doch nicht im Sinne einer „Krönung“ des Ganzen, sondern als typische *Anwendung*. Insofern erscheint das Wort „Stufe“ etwas irreführend, zumal Müller am Schluss des Vorworts ausdrücklich betont, dass *nur in der Kombination aller Aspekte* (d.h. der „Stufen“) *ein adäquates Verständnis der von ihm dargelegten Gedankengänge aufgebaut würde*.

Formal gliedert sich das Buch in 6 Kapitel, von denen das letzte die Lösungen aller Aufgaben enthält. Zwei Seiten mit Fotos von Plexiglasmodellen (Prismenzerlegung in drei volumengleiche Pyramiden, Kegelschnitte) bzw. Pappmodellen (systematische Variation eines Pyramidendaches), eine Seite mit Literaturhinweisen sowie ein ausreichend ausführliches Stichwortverzeichnis schließen sich an. Das Buch enthält sehr viele Abbildungen, die in der Regel sehr gut lesbar sind (Ausnahme Fig. 3.27a, Fig. 4.23a). Müller erzeugt den räumlichen Eindruck fast ausschließlich durch Verwendung verschiedener Strichstärken, nicht durch Unterbrechen von weiter hinten liegenden Linien. Die Sorgfalt, die er auf die Herstellung der Figuren verwandt hat, kommt dem Verständnis des Textes sehr zugute.

### 3. Der Inhalt

Da das Buch eine elementar gehaltene Einführung in die Raumgeometrie und keine axiomatisch fundierte *Raumtheorie* sein will, wählt Müller die Form des „erzählenden Textes“. Neue Begriffe erscheinen in diesem Rahmen einfach fett gedruckt, wenn sich ihre Bedeutung zwanglos aus dem Zusammenhang ergibt, während wichtige mathe-

matische Erkenntnisse als (Lehr-) Sätze hervorgehoben werden. Andererseits macht es Müller dem Anfänger aber nicht gerade leicht, indem er stets vom Allgemein(st)en zum Speziellen voranschreitet und dadurch die Fülle der zu lernenden Begriffe und Bezeichnungen noch vergrößert. Darüber hinaus enthalten auch die Beispiele neuen Stoff, den man nicht ohne weiteres weglassen kann. Man möge sich deshalb durch die geringe Seitenzahl nicht täuschen lassen. Der Inhalt ist umfangreicher, als man auf den ersten Blick vermutet.

#### 3.1 Kapitel 1

Es handelt von Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen; Winkeln (mit relativ breiter Diskussion aller möglichen Spezialfälle); Ebenbüscheln (später auch –bündeln), um zwei Sätze über Schnittgeraden zu formulieren und zu beweisen. In einem Beispiel wird das Gemeinlot zweier windschiefer Geraden ganz allgemein bestimmt und in einem anderen Beispiel ein (sehr) kurzer Blick auf die Platonischen Körper geworfen. Um die räumliche Vorstellung zu unterstützen, betont Müller dynamische Erzeugungsweisen, so bereits bei der Einführung in die „Welt der Dächer“ (mit vielen dazugehörigen Fachbegriffen), vor allem aber bei der Definition „allgemeiner Zylinder und Kegel“. In beiden Fällen ist eine ebene Leitkurve  $c$  gegeben und eine Gerade. Wird diese parallel zu sich selbst an der Kurve entlanggeführt, entsteht ein „allgemeiner“ Zylinder; wird sie um einen festen Punkt  $S$  außerhalb der Kurvenebene so gedreht, dass sie jeden Punkt von  $c$  dabei berührt, erhält man einen „allgemeinen“ Kegel. Der Zusatz „allgemein“ meint dabei, dass die so erzeugten Flächen ins Unendliche reichen, nicht dass an die Leitkurve  $c$  keine besonderen Bedingungen geknüpft sind. Da  $c$  nicht einmal (einfach) geschlossen sein muss, entfernt sich diese Begriffsbildung sehr weit von allen landläufigen Vorstellungen, die man mit Zylindern und Kegeln verbindet. So zum Beispiel wäre auch ein unendlicher *ebener* Papierstreifen ein „allgemeiner“ Zylinder. Da man so etwas aber nicht brauchen kann, wird im Buch sofort auf die üblichen Zylinder, Prismen, Pyramiden spezialisiert, wobei immer die *Mantelfläche* des gleich bezeichneten Körpers gemeint ist. Dies ist im übrigen eine der wenigen Stellen im Buch, in denen Müller explizit auf die Schule Bezug nimmt, indem er auf die Doppeldeutigkeit der Begriffe hinweist.

Andere dynamische Erzeugungsweisen – jetzt der Körper – schließen sich an, wobei Spat, Quader, Würfel und Kugel gesondert behandelt werden. Damit treten in diesem Kapitel die Hauptformen aller Körper bzw. Flächen auf, die in der Schule bis zur Jahrgangsstufe 10 vorkommen. Es handelt sich um eine Art *Vorkapitel*, denn eigentlich wird nur „begrifflich aufgerüstet“, aber mit den Begriffen (noch) nichts wirklich angefangen.

#### 3.2 Darstellende Geometrie

Mehr als die Hälfte des Haupttextes von 135 Seiten ist der Darstellenden Geometrie zuzurechnen, sofern man, wie es üblich ist, hierbei die Kegelschnitte und die Kugel einbezieht. Es handelt sich um das Kapitel 2 (Ebene Darstellung räumlicher Objekte), 3.1 (Grundideen beim Zeichnen), 3.4 (Geometrische Analyse bei komplizier-

teren Dächern), 4 (Nicht ebene Teile oder nicht geradlinige Kanten), 5 (Die Kugel).

Mit Recht stellt Müller die *Axonometrie* als ein besonders einfach zu realisierendes Abbildungsverfahren des Raumes an den Anfang. Da er jedoch alle Anleihen bei der Linearen Algebra vermeidet, hat er Schwierigkeiten, ihre Eigenschaften „geometrisch“ zu beweisen. Seine Argumentation ist eher undurchsichtig, so zum Beispiel wenn er beim Nachweis der Geradentreue schreibt: „Dennoch ist aber aufgrund der Koordinatenverwendung zur Abbildung *unmittelbar klar*, dass sich die geometrischen Sachverhalte in der  $x$ - $y$ -Ebene im Raum über ihre Koordinaten bzw. Gleichungen auf das  $x^s$ - $y^s$ -Koordinatensystem übertragen“ (S. 28, meine Hervorhebung). Das ist zwar richtig, aber man müsste doch wenigstens hinschreiben, wie sich die „Gleichungen übertragen“, die hier gar nicht auftreten! Dementsprechend ist seine Schlussbemerkung „Die Verwendung von Koordinaten und Gleichungen war hier ein starkes Hilfsmittel“ (S. 29) überhaupt nicht nachvollziehbar. Da Müller den Satz von Pohlke an späterer Stelle bringt, allerdings ohne Beweis, hätte er sich hier mit dem entsprechenden Hinweis begnügen können.

Dies ist aber die einzige erwähnenswerte Ungereimtheit, die mir aufgefallen ist. Bezüglich der übrigen Darstellung des Stoffes wird es daher genügen, die wichtigsten Stichwörter anzuführen. Noch im Rahmen der Axonometrie behandelt Müller Kavalier- und Militärriß und geht auf die Begriffe der Isometrie und Dimetrie (auch Ingenieurdimetrie) kurz ein. Es folgen die verschiedenen Projektionsarten: Zentralprojektion (nur erwähnt), schiefe und normale Parallelprojektion (letztere mit sehr knapper Darstellung der Konstruktion des Normalrisses eines Koordinatendreiecks in einer beliebigen Spurebene), Ein- und Mehrtafelprojektion, kотиerte Projektion und die Konstruktion wahrer Größen. Kurze Erwähnung – ohne eine Abbildung! – finden das hyperbolische Paraboloid und das Drehhyperboloid als Regelflächen, ausführlicher werden Kreiszyylinder als Gestaltungselement von Dachflächen und die Abbildung von Kreisen mittels Kavalier- und Militärprojektion (auch im Hinblick auf Dachformen) sowie die Anfertigung von Skizzen durch Einbetten in Quader dargestellt. Die bereits vorher definierte (räumliche und ebene) Achsenaffinität spielt bei der Behandlung der Ellipse eine zentrale Rolle, aber die Brennpunktdefinition (Zylinder- und Kegelschnitt) fehlt ebenfalls nicht. Anwendungen (Rundgaube, Kreuzgewölbe) sowie bei der Darstellung der Kugel runden das Ganze ab, wobei auch Kartennetzentwürfe kurz gestreift werden. Die übrigen Kegelschnitte treten dagegen nur auf einer Seite auf.

Abschließend sei noch die sogenannte *Dachausmittlung* erwähnt, der Müller entsprechend seinem didaktischen „Dachkonzept“ einen relativ großen Raum widmet. Man versteht darunter die Aufgabe, die Schnittgeraden benachbarter und gleich geneigter Dachflächen in der Traufenebene zu konstruieren. Obwohl die Aufgabe eher geringe Anforderungen an das räumliche Vorstellungsvermögen stellt, erweist sie sich als nützlich, weil die Lösung bei trapezförmigen Grundrissen einige elementargeometrische Fragen

aufwirft, die sich nicht nur gut zur Aufgabenstellung eignen (vgl. Aufgabe 3.15, S. 99), sondern auch der Winkelhalbierenden im Schulunterricht einen neuen Anwendungskontext erschließen. Das könnte die Raumgeometrie in der Schule fördern.

### 3.3 Maßbestimmungen

Müller hat schon im Untertitel seines Buches und dann im Vorwort als fünfte „Stufe“ *Berechnungen* besonders betont. Diesen sind die Abschnitte 3.2 (Grundideen beim Berechnen), 3.3 (Skizzieren und Berechnen beim Ausbau von Dachformen) sowie 5.2, wo die einschlägigen Formeln für die Kugel hergeleitet werden, explizit gewidmet. Dabei geht es hauptsächlich um die Berechnung von (Ober-) Flächen- und Rauminhalten, also den klassischen Stereometriestoff. Nach einem knappen trigonometrischen Vorspann (Definition der Funktionen am rechtwinkligen Dreieck, Herleitung von Sinus- und Kosinussatz für das spitzwinklige Dreieck) werden die „Grundeigenschaften“ von Flächen- und Rauminhalt angegeben und vor allem im Hinblick auf Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit erörtert. Es wird sogar der berühmte Dehnsche Satz formuliert, nach dem volumengleiche Polyeder nicht zerlegungsgleich sein müssen, allerdings ohne dass der Leser erfährt, was dieses Ergebnis eigentlich bedeutet. Eine anschauliche Begründung führt zur Aufstellung des Cavalierischen Prinzips, mit dessen Hilfe dann das Pyramiden- und später auch das Kugelvolumen wie in der Schule üblich bestimmt werden. Parallel dazu wird das Volumen einer quadratischen Pyramide aber auch mittels Integration berechnet. Sieht man noch von einer zweiten Anwendung der Integralrechnung ab (Bestimmung des Volumens einer Rundgaube durch Integration der trigonometrischen Querschnittsfunktion S. 120 f), so bleiben die „Berechnungen“ im Rahmen dessen, was Lehrpläne für die Sekundarstufe I vorsehen, wobei der Stoff komprimiert unter systematisierenden Gesichtspunkten dargestellt wird.

### 4. Einschätzung unter dem Aspekt einer raumgeometrischen Grundbildung

Müllers Buch gibt eine Antwort auf die Frage: Welches Wissen sollen zukünftige Lehrer in der Raumgeometrie erwerben, damit sie *fachlich* auf die Anforderungen ihres Berufes genügend vorbereitet sind? Es versteht sich, dass dieses Wissen systematischer angelegt und weiter ausgreifend sein muss als der Stoff, der in den gerade gültigen Lehrplänen steht. So ist das große Gewicht, das Müller der Darstellenden Geometrie beimisst, nicht schon deswegen problematisch, weil viele ihrer Verfahren nach Lage der Dinge kaum eine Chance haben, auch im Unterricht praktiziert zu werden. Denn das Lesen ebener Zeichnungen von dreidimensionalen Objekten wird man stets benötigen, und deshalb sollte man auch wenigstens im Prinzip wissen, welche Ideen ihrer Herstellung zugrunde liegen.

Ein nicht zu unterschätzendes Problem ist es jedoch, dass der Lernende zugleich mit einer Menge an Stoff, verbunden mit einer hohen Begriffsdichte, konfrontiert wird. Es ist meine Überzeugung, dass man, wenn man die

Raumgeometrie wieder mit Leben füllen möchte, alles vermeiden sollte, was für ein erstes Grundverständnis entbehrlich ist. Wichtiger als die Systematik ist nämlich, die Lernenden zu einer *aktiven Auseinandersetzung* mit Phänomenen des Raumes zu bewegen und ihnen dadurch ein Können zu vermitteln, das auch in der beruflichen Praxis verwendbar ist.

Was diesen letzten Punkt anlangt, so fällt auf, dass Müller – übertrieben formuliert – dem Leser fast nichts überlassen möchte, sondern sich mit hohem verbalem Aufwand darum bemüht, möglichst lückenlose Beschreibungen zu liefern. Das geht nicht selten zu Lasten der Anschauung, zum Beispiel bei den Winkeln, wo keine Illustration die Vorstellung unterstützt und sehr exakt alle möglichen Spezialfälle angeführt werden, (wobei aber sonderbarerweise die Definition des Lotes auf einer Ebene fehlt). Wäre es da nicht sinnvoller, die Studenten bzw. den Leser aufzufordern, die nötigen Festlegungen selbst zu treffen, und im Buch lediglich die Ergebnisse zu fixieren? Ähnlich könnte bei der Definition von Zylindern und Kegeln durch eine Zeichnung (fast) alles gesagt werden, zumindest wenn man, was sinnvoll wäre, sich auf geschlossene Leitkurven beschränkt.

Im Hinblick auf inhaltliche Entlastung wäre zu bedenken, ob nicht alles, was in der Schule genauso oder ähnlich behandelt wird, wegfallen könnte. Das beträfe hier die Trigonometrie und die Herleitung von Flächen- und Volumenformeln. Ich glaube auch nicht, dass mit der Behandlung der beiden Inhaltsfunktionale, wie es hier geschieht, ein tieferes Verständnis der Zusammenhänge erreicht wird, solange dabei die Frage, in welchem Sinne es sie überhaupt „gibt“, völlig ausgeklammert bleibt.

Die größten Abstriche aber müssten m. E. bei der Darstellenden Geometrie erfolgen. Wie Müller halte ich die Axonometrie für so wichtig, dass sie mit Recht an den Anfang gestellt wird. Nach ersten Anwendungen (Militärriß, Kavalierriss) sollte aber möglichst bald die Parallelprojektion herangezogen und der Zusammenhang beider mittels des Satzes von Pohlke (ohne Beweis) verdeutlicht werden. Bestimmte, (nur) in der Darstellenden Geometrie übliche Begriffsbildungen wie „Hauptlinien“ und „-ebenen“ halte ich für entbehrlich, weil man sie auch für die Normalprojektion nicht benötigt. Denn die senkrechte Projektion eines räumlichen Dreibeins  $Uxyz$  auf eine Ebene, die die Achsen in  $X, Y, Z \neq U$  schneidet, lässt sich anders als bei Müller auch mit einfacheren Mitteln erklären. Da hierbei auch Aktivitäten der Lernenden einbezogen werden können, sei dies kurz skizziert.

Jeder stellt ein *Kantenmodell* des Dreibeins her und befestigt an seinen Enden (*ungleichmäßig* abgeschnitten) ein (Papier-) Dreieck  $XYZ$ . Dieses legt man nach unten, so dass man das Modell einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze  $U$  vor sich hat und projiziert nun  $U$  senkrecht auf die Grundfläche (nach Augenmaß mittels eines Stäbchens oder mit Hilfe eines einfachen Lotes). Der Fußpunkt  $U'$  wird markiert, das Dreieck abgelöst und die Projektionen  $XU'$ ,  $YU'$ ,  $ZU'$  der Beine werden eingezeichnet. Spätestens dann entdeckt man:  $U'$  ist Höhenschnittpunkt von  $XYZ$ .

Der Beweis gelingt leicht mittels des Satzes, der schon bei Euklid steht, aber bei Müller fehlt: Eine Gerade steht genau dann senkrecht auf einer Ebene, wenn sie auf zwei

in der Ebene liegenden, nicht parallelen Geraden senkrecht steht. Nun ist  $UU'$  senkrecht zu  $XYZ$ , also  $UU'$  senkrecht zu  $XY$ . Dasselbe gilt für  $UZ$ , folglich steht  $XY$  senkrecht auf der Ebene  $UU'Z$  und ist somit auch senkrecht zu  $ZU'$ . Aus den gleichen Gründen ist  $XU'$  senkrecht zu  $YZ$  und  $YU'$  senkrecht zu  $ZX$ , d. h.  $U'$  ist Höhenschnittpunkt von  $XYZ$ , und da  $U'$  im *Innern des Dreiecks*  $XYZ$  liegt, muss dieses *spitzwinklig* sein. (Müller braucht für den Beweis mit zusätzlichen Erklärungen zwei Seiten!)

Dies genügt bereits, um ähnlich wie bei Müller (S. 49) zu zeigen, dass die Normalprojektion eines Würfels in Richtung einer Raumdiagonalen eine Isometrie ist, bei der die axonometrischen Achsen zu je zweien einen Winkel von  $120^\circ$  bilden. Auf die Ingenieursdimetrie oder andere normale Dimetrien einzugehen, halte ich dagegen für nicht notwendig.

Da Mehrtafelprojektionen in Ingenieur- und Handwerkerberufen eine große Rolle spielen, wird man auf sie ebenfalls nicht (ganz) verzichten können. Für die Bestimmung wahrer Größen, insbesondere Längen, ist ihre Behandlung jedoch keineswegs notwendig. Man klappt einfach Stützdreiecke oder -trapeze in eine geeignete Ebene um. Das Beispiel von Seite 59 des Buches zeigt, wie stattdessen die Begrifflichkeit der Darstellenden Geometrie das Verständnis für diesen einfachen Gedanken geradezu behindern kann! Und wenn es darum geht, die wahre Gestalt eines Dreiecks im Raum zu bestimmen (Aufgabe 2.11), sollten Studenten und Schüler doch von selbst auf die viel näher liegende Idee kommen, einfach die Länge der Seiten durch Umklappen der Stütztrapeze zu bestimmen (oder mit Hilfe des Satzes von Pythagoras zu berechnen!) statt das Verfahren des „Paralldrehens“ einer Ebene zu verwenden (S. 60). Hier hat Müller offenbar primär das Ziel im Auge, gewisse Standardverfahren der Darstellenden Geometrie zu vermitteln und nicht nur grundlegende Ideen (vgl. S. 5 f.). Ebenso wirkt die Anwendung der Strahlensätze zur Streckenteilung, die als „Hilfskonstruktion“ häufig vorkommt, weniger hilfreich als puristisch. Messen und Rechnen sind doch durchaus sinnvolle Aktivitäten.

Im Hinblick auf die Ellipse und die perspektiven Affinitäten fallen Kürzungsvorschläge nicht leicht. Andererseits häufen sich die neuen Begriffe hier besonders stark. Nimmt man aber die „Alltagstauglichkeit“ zum Maßstab, so lässt sich wohl Folgendes vertreten: Definition als senkrecht affines Bild des Kreises, konjugierte Durchmesser, Konstruktion der Hauptachsen nach Rytz mit der daraus folgenden Papierstreifenkonstruktion, Brennpunkteigenschaften via Zylinderschnitt und „Gärtnerellipse“, Kreisprojektion. Weitere Ausführungen zu den Kegelschnitten und Regelflächen erübrigen sich, obwohl dies natürlich schade ist.

Mit einer bloßen Reduktion des Stoffes ist es freilich nicht getan. Die freigewordenen Kapazitäten sollten sinnvoll gefüllt werden, nicht mit anderen Inhalten, sondern mit „produktiven“ Aufgaben, von denen es in Müllers Buch durchaus einige gibt (besonders schön 2.10). Es sind aber noch zu wenige, und sie sollten möglichst wichtige oder interessante Raumphänomene erschließen helfen. Ich deute einige Möglichkeiten an. Man kann die

Platonischen Körper experimentierend entdecken und einfache Zusammenhänge auffinden lassen (Nölle 1996) oder an einem Kantenmodell eines Würfels Fragen studieren wie: Wo treffen die Lote von den sechs Ecken, die nicht zu einer Raumdiagonalen gehören, auf diese Raumdiagonale? (Lösung durch Umklappung oder Rechnung mit Hilfe des Kathetensatzes oder geometrische Überlegung). Anhand desselben Modells und zueinander windschiefen Kanten und/oder Diagonalen könnten sich die Lernenden das Problem des Gemeinlotes konkret klarmachen und in einfachen Fällen auch lösen. Konstruktionen in Schrägrissen, z. B. von Schatten (Ingrisch 1996), bieten ein reiches Übungsfeld, um die Eigenschaften der Parallelprojektion anzuwenden. Schließlich möchte ich noch eine weniger bekannte Aufgabenstellung nennen, die zur Entdeckung eines besonderen Raumphänomens führt. Hat man nämlich den Normalriss eines räumlichen Dreiecks wie oben besprochen, dann liegt es nahe, nach dem Flächeninhalt eines Spurdreiecks  $XYZ$  zu fragen, dessen Achsenabschnitte bekannt sind. Sei nämlich (Bezeichnungen wie oben)  $H$  der Schnittpunkt von  $ZU'$  mit  $XY$ , also Fußpunkt der Höhe durch  $Z$  auf  $XY$ . Dann lässt sich  $UH$  als Höhe im rechtwinkligen Dreieck  $XUY$  errechnen, ebenso  $HZ$  als Hypotenuse des Dreiecks  $ZUH$ . Als Ergebnis für den Inhalt von  $XYZ$  folgt nach einfacher Rechnung die Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras auf Tetraeder mit rechtwinkliger „Raum-ecke“: Das Quadrat der Hypotenusenfläche  $XYZ$  ist gleich der Summe der Quadrate der Kathetenflächen  $UXY$ ,  $UYZ$ ,  $UZX$ .

Abschließend möchte ich betonen, dass meine Vorschläge nicht primär als Kritik zu verstehen sind, sondern als ein Beitrag zur Diskussion über die Raumgeometrie, zu der Müller mit seinem Buch eine wichtige Vorlage geliefert hat.

#### *Literaturverzeichnis*

- Ingrisch, W. (1996): Schattenkonstruktionen. – In: Mathematik Lehren (H. 77), S. 18-22  
 Nölle, B. E. (1996): Die Platonischen Körper. – In: Mathematik Lehren (H. 77), S. 52-57

---

#### **Autor**

Kroll, Wolfgang, Prof., Fachbereich Mathematik, Philipps-Universität Marburg, D-35032 Marburg  
 E-Mail: [happel@mathematik.uni-marburg.de](mailto:happel@mathematik.uni-marburg.de)