Analysen "Computerunterstütztes Lösen offener mathematischer Aufgaben" – eine Nachbetrachtung

Heinz Schumann, Weingarten (Germany)
Thomas Weth, Nürnberg (Germany)

Unter der Vielfalt idealtypischer Kriterien und Aspekte für die Analyse und Konstruktion mathematischer Aufgaben nach Art und Weise

- der schulischen Stoffgebiete und Themen
- der zu erlernenden stoffunabhängigen mathematischen Gegenstände, wie Definitionen, Sätze, Beweise, Algorithmen, ...
- der anzueignenden intellektuellen Techniken
- der zu erwerbenden instrumentellen Techniken
- des (z.B. kognitiven bzw. affektiven) Schwierigkeitsgrades
- des Einsatzes in Unterrichtsphasen
- der unterliegenden didaktischen Prinzipien
- der Heurismen zu ihrer Lösung
- ihrer medienspezifischen Darstellung und Lösung
- der mathematischen Lösbarkeit (Mächtigkeit der Lösungsmenge)
- ihrer Lösungswege
- der Explizitheit ihrer Formulierung
- der Bewertung von Lösung und Lösungsweg

sind in der aktuellen mathemadikdidaktischen Diskussion über das Lösen sogenannter offener Aufgaben im wesentlichen nur die vier Aspekte am Ende unserer unvollständigen Auflistung thematisiert worden (vgl. u.a. Becker und Shimada 1997, Pehkonen 1997, Nohda 1991/1995)

Anliegen der vorliegenden Analyse "Computerunterstützes Lösen offener mathematischer Aufgaben" ("Computer-aided solution of open problems in mathematics teaching") ist die Einbeziehung des Aspekts der medienspezifischen, insbesondere der computerisierten Darstellung und Lösung offener Aufgaben in die aktuelle Diskussion.

Im folgenden skizzieren wir den Begriff der medienspezifischen Aufgabenstellung und -lösung an einem Beispiel aus der ebenen Geometrie.Wir gehen aus von einer medienneutralen Aufgabenstellung:

Finde alle Typen von Polygonen mit folgenden Eigenschaften heraus:

1) die Polygonecken sind Punkte eines quadratischen Gitters
2) die Seiten des Polygons liegen auf den (waagerechten oder senkrechten) Gitterlinien
3) der Polygonumfang hat die Länge von 12 Einheiten.

Die Lösungen der Aufgabe in Gestalt von "Figurenabbau-Gruppierungen" (Schumann 1985) zeigt Abb. 1.

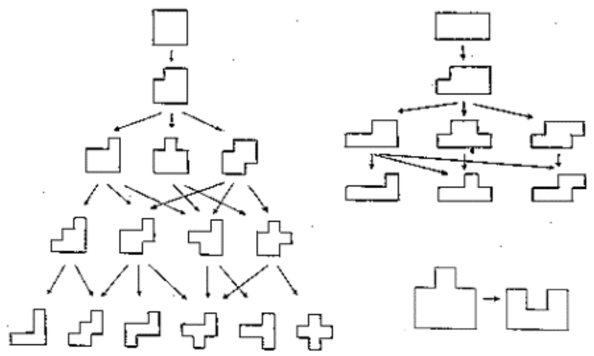

Abb. 1 (Lösungen der Aufgabe)

Aufgabendarstellung in "materialisierter" Form:
Finde durch Legen mit Streichhölzern alle Vielecke heraus, die die beiden Eigenschaften haben: Der Vieleckrand wird durch 12 Streichhölzer gebildet und in jeder Ecke stehen die Streichhölzer im rechten Winkel.

Aufgabendarstellung in "zeichnerischer" Form:
Finde durch Einzeichnen in kariertes Papier alle Sorten von Vielecken heraus, deren Seiten auf den waagerechten und senkrechten Linien liegen und deren Umfänge 12 Längeneinheiten betragen.

Aufgabendarstellung in "computerisierter" Form:
Benutze den Gittermodus und die Option der Umfangsmessung, um alle Arten von Polygonen herauszufinden, die gleichzeitig folgende Eigenschaften besitzen: die Polygonecken sind Gitterpunkte, die Polygonseiten bilden in jeder Ecke einen rechten Winkel und der Polygonumfang ist 12 Einheiten lang.

(Eine andere Form der materialisierten Aufgabenstellung ergibt sich aus der Verwendung eines Nagelbretts mit Spanngummis; diese Form entspricht der Verwendung der "Gummiband-Geometrie" im Gittermodus eines dynamischen Geometrie-Systems.)

Vergleicht man die unterschiedlichen Darstellungsformen, so stellt sich die computerisierte Form als die medial aufwendigste heraus, die neben der Verfügbarkeit über entsprechende Hard- und Software auch noch entsprechende Kenntnisse in der Benutzung derselben voraussetzt. Selbst dann, wenn wir ein entsprechendes interaktives Arbeitsblatt (Schumann 1998) entwickeln und die "Reaktivität" des Computermediums berücksichtigen, bleibt der mediale Aufwand gegenüber den anderen Darstellungsformen für diese Aufgabe beträchtlich. Unterrichtsversuche zeigen, dass in den Klassen 5-7 bei materialisierter Aufgabenstellung und in den Klassen 8-10 bei zeichnerische Aufgabenstellung mehr Lösungen gefundenen werden als bei der computerisierten Aufgabenstellung.

Fazit: Die Nutzung des Computers zur Darstellung und Lösung einer offenen Aufgabe muss sich lohnen in dem Sinne, dass diese erst durch das Computermedium effektiv bearbeitet werden kann.

Das gilt insbesondere für (offene) Aufgaben, die durch das Medium Computer überhaupt erst induziert werden. Zum Beispiel: "Stelle die Zahlen 0,1,2,...,100 nur mit den vier Ziffern 1,9,9,9 (in genau dieser Reihenfolge) dar.

Dabei dürfen die vier Grundrechenarten [+],[-],[x], [÷], Klammern und die 'ziffernfreien Taschenrechner-Funktionen' [√],[x^y], und [!] verwendet werden, nicht aber [x^2]." (Herget 1999). Zahlreiche weitere Beispiele befinden sich in den Beiträgen zur vorliegenden Analyse.

Liegt also eine (offene) Aufgabe vor, die nicht schon im Kontext eines Computerwerkzeugs gestellt ist, so ist zu prüfen, erstens, ob ihre Bearbeitung mit dem Computer angezeigt ist; falls dies zutrifft, zweitens, welches Computerwerkzeug sich für eine Bearbeitung eignet, drittens, über welche Werkzeugkompetenz der/die Aufgabenlöser/in verfügen muss und viertens, ob es schon aus zeitlichen Gründen vertretbar ist, die möglicherweise fehlenden instrumentellen Kompetenzen zu erwerben, um die Aufgabe lösen zu können. – Das sind Entscheidungsfragen, die wohl von den Lehrern/ Lehrerinnen für die Schüler und Schülerinnen der Sekundarstufe I beantwortet werden müssen.

Nun zu den einzelnen Analysebeiträgen.

In dem Beitrag "Computerunterstützung offener Aufgabenstellungen" von Thomas Weth (2000) werden allgemeine Aussagen über die Beziehung des Lösens offener Aufgaben zum "Divergentem Denken" und zur "Kreativität" gemacht; am Beispiel "Merkwürdige Punkte und Linien des Dreiecks" wird nachgewiesen, wie offene Aufgabenstellungen zur Hinführung, zur Begleitung und zur Ergänzung eines Themengebiets unter Unterstützung durch ein dynamisches Geometrie-System eingesetzt werden können. Die Effizienz solcher Systeme bei der Behandlung des Themas ist augenscheinlich: es werden inhaltlich neue Aussagen gewonnen, die auch dem Schüler und der Schülerin zugänglich sind.

Der Beitrag "Computerunterstützes Lösen offener raumgeometrischen Aufgaben" von Heinz Schumann (2000) zeigt die vielfältigen Möglichkeiten des Lösens offener Aufgaben auf, die durch die Verfügbarkeit von für den Raumgeometrie-Unterricht geeigneten Computerwerkzeugen gegeben sind. Über Ergebnisse entsprechender unterrichtspraktischer Experimente wird berichtet. Computeralgebra wird eingesetzt, um eine offene Berechnungsaufgabe zu lösen.

Bärbel Barzel und Regina Möller (2001) geben in ihrem Beitrag "About the use of the TI-92 for an open learning approach to power functions. A teaching study" im Zusammenhang mit der Funktionenlehre (am Beispiel der Potenzfunktionen in einer offenen Lernumgebung) Antworten auf folgende wesentliche Fragen:

- Welche Art des Verstehens gewinnen die Schüler/Schülerinnen in Bezug auf die unterschiedliche Repräsentation von Funktionen? (Funktionale Perspektive)
- Wie unterstützt die Verwendung eines grafikfähigen Rechners die Verstehensprozesse der Schüler und Schülerinnen? (Technologische Perspektiven)
- Wie verbessert die Verwendung eines grafikfähigen Rechners konstruktivistische Lernprozesse und die sachbezogene Kommunikation bei den Schülern und Schülerinnen und welche Rolle spielt diese Kommunikation in einer offenen Lernumgebung? (Sozial-konstruktivistische Perspektive)

Im Beitrag "Nutzung von Programmierwerkzeugen für das Lösen offener Aufgaben im Mathematikunterricht der Sekundarstufe" begründen Bernd Hafenbrak und Heinz Schumann (2001) die Notwendigkeit des Einsatzes von Programmierwerkzeugen für solche offenen Aufgaben, deren Lösung schon aus Gründen des Berechnungsaufwandes, im Unterricht nicht zu bewältigen wären und für solche offenen Aufgaben, deren Lösungsalgorithmen nicht sequentieller Art sind. Das wird anhand von vor allem offenen arithmetischen Aufgaben belegt. - Sie weisen hin auf die Bedeutung des mathematisch-informatischen Arbeitsparadigma, das durch die Bereitstellung interaktiver Programmierumgebungen realisiert werden kann.

Literatur

Barzel, B.; Möller, R. (2001): About the use of the TI-92 for an open learning approach to power functions. A teaching study. – In: ZDM. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 33(1), S. 1–5 (http://www.fiz-karlsruhe.de/restricted/zdm/articles/zdm011a1.pdf until Febr. 2002, then http://www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdm011a1.pdf)

Becker, J.P.; Shimada, S. (1997): The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics. – Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics

Hafenbrak, B.; Schumann, H. (2001): Die Nutzung von Programmierwerkzeugen für das Lösen offener Aufgaben im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. – In: ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 33(1), S. 7–11 (http://www.fiz-karlsruhe.de/restricted/zdm/articles/zdm011a2.pdf until Febr. 2002, then http://www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdm011a2.pdf)

Herget, W. (1999): Zahlen erzeugen (ab 15 Jahren). – In: Meissner, H. et al. (Hg.): Proceedings of the International Conference "Creativity and Mathematics Education" (July 15 – 19, 1999 in Muenster, Germany). S. 282

Nohda, N. (1991): Paradigm of the "open approach" method in mathematics teaching. – In: ZDM. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 23(2), S. 32 – 37

Nohda, N. (1995): Teaching and evaluating using "open-ended problems" in classroom. – In: ZDM. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 27(2), S. 57 – 61

Pehkonen, E. (1995): Introduction: Use of open-ended problems. – In: ZDM. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 27(2), S. 55 – 57

Pehkonen, E. (Hg.) (1997): Use of open-ended problems in mathematics classroom. – Research Report 176, University of Helsinki, Department of Teacher Education

Schumann, H. (1985): Umfanginvariante Figuren an einfachen Figuren. – In: Mathematische Unterrichtspraxis 6(1), S. 19 – 30

Schumann, H. (1998): Interaktive Arbeitsblätter für das Geometrielernen. – In: Mathematik in der Schule 36(10), S. 562 – 569

Schumann, H. (2000): Computerunsterstütztes Lösen offener raumgeometrischer Aufgaben. Herrn Prof. Dr. Dietrich Kahle zum 65. Geburtstag. – In: ZDM. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 32(6), S. 175 – 185 (http://www.fiz-karlsruhe.de/restricted/zdm/articles/zdm006a2.pdf until Dec 2001, then http://www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdm006a2.pdf)

Silver, E.A. (1995): The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspektives. – In: ZDM. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 27(2), S. 67 – 72

Stacey, K. (1995): The Challenges of keeping open problem-solving open in school mathematics. – In: ZDM. Zentralblatt

für Didaktik der Mathematik 27(2), S. 62 – 67
Weth, Th. (2000): Computerunterstützung offener Aufgabenstellungen im Geometrieunterricht. – In: ZDM. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 32(6), S. 166 – 174 (http://www.fiz-karlsruhe.de/restricted/zdm/articles/zdm006a1.pdf until Dec 2001, then http://www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdm006a1.pdf)
Zimmermann, B.(1991): Offene Probleme für den Mathematikunterricht und ein Ausblick auf Forschungsfragen. – In: ZDM. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 23(2), S. 38 – 46

Autoren
Schumann, Heinz, Prof. Dr., PH-Weingarten, Institut für Bildungsinformatik, Fak. III, Mathematik/Informatik, D-88250 Weingarten.
E-mail: schumann@ph-weingarten.de
Weth, Thomas, Prof. Dr., Universität Erlangen-Nürnberg, Didaktik der Mathematik, Regensburger Str. 160, D-90478 Nürnberg.
E-mail: tsweth@ewf.uni-erlangen.de