

# Geometrische Algorithmen zur Visualisierung diskreter und kontinuierlicher Tensorfelder

Ingrid Hotz

ihotz@ucdavis.edu

**Abstract:** Diese Arbeit besteht im Wesentlichen aus zwei relativ eigenständigen Teilen, die in ihrer Entstehung jedoch eng miteinander verknüpft sind. Beide beschäftigen sich mit geometrischen Problemen im Kontext von Visualisierung. Im ersten Teil stelle ich zwei Algorithmen zur Berechnung charakteristischer Flächenkurven, Geodäten und Krümmungslinien, vor. Durch den geometrischen Ansatz sind sie sowohl für analytische sowie diskrete Flächen geeignet. Im Gegensatz zu klassischen Berechnungsmethoden, ist eine natürliche Anpassung der Schrittweite an die lokale Geometrie möglich, was eine effiziente und genaue Berechnung erlaubt.

Der zweite Teil der Arbeit ist der Visualisierung von Tensorfeldern gewidmet. Die Interpretation symmetrischer Tensorfelder als Störung einer flachen Metrik, welche durch eine isometrischer Einbettungen dargestellt wird, führt zu einer intuitiven Darstellung der physikalischen Bedeutung der Tensorfelder. Im Gegensatz zu bisherigen Einbettungsverfahren beinhaltet meiner Methode keine prinzipielle Einschränkung an die Metrik. Sie basiert auf einem konstruktiven Ansatz, der das Problem der Mehrdeutigkeit, welches bei algebraischen Lösungsansätzen auftritt, löst. Erstmals ist es auch möglich automatisch nur Teilflächen einzubetten, falls keine globale Einbettung existiert.

## 1 Einleitung

Aufgrund der schnellen Entwicklung von Computerleistung sowie numerischer Verfahren, ist es möglich immer größere Datenmengen zu erzeugen, z.B. bei der Simulation technischer oder wissenschaftlicher Prozesse. Um diese Daten auch verstehen und analysieren zu können ist eine geeignete Aufbereitung von grosser Bedeutung. Visualisierung oder auch graphische Datenverarbeitung ist als wesentlicher Bestandteil in diesem Prozess nicht mehr wegzudenken. Ein großer Teilbereich der Visualisierung beschäftigt sich mit der Darstellung und Analyse geometrischer Objekte, wobei man sich z.B. für ihre Topologie oder ihr Krümmungsverhalten interessiert. Klassische Ansätze zur Analyse analytischer Flächen beruhen häufig auf deren Differenzierbarkeit. Probleme werden durch Differentialgleichungen beschrieben, welche mit Standardverfahren gelöst werden, wobei die geometrische Bedeutung des Problems verloren geht. Da wir es in der Visualisierung im Allgemeinen mit diskreten Daten zu tun haben sind solche Lösungsverfahren oft nicht anwendbar. Man ist mit dem Problem konfrontiert geeignete diskrete geometrische Größen als Analogon zur analytischen Geometrie zu definieren. In meiner Dissertation habe ich für zentrale geometrische Fragestellungen Algorithmen entwickelt, die eng an die geometri-

sche Natur der Aufgabe geknüpft sind und sowohl für analytische sowie diskrete Probleme geeignet sind.

Bei der Darstellung und der Analyse von Flächen spielen charakteristische Flächenkurven und Netze eine große Rolle. Geodäten sind wegen ihrer lokalen Sensitivität besonders für eine lokale Analyse geeignet. Im Gegensatz dazu sind Krümmungslinien stabil unter lokalen Änderungen und eignen sich daher für globale Untersuchungen. Im ersten Teil der Arbeit stelle ich sowohl für Geodäten als auch für Krümmungslinien alternative Algorithmen vor, die eine effiziente Berechnung der Flächenkurven ermöglichen. Beide Algorithmen sind auf diskrete Flächen übertragbar. Für Geodäten liefert er eine neue diskrete Geodätendefinition. Der Krümmungslinien Algorithmus beinhaltet eine automatische Analyse von Nabelpunkten.

Im zweiten Teil meiner Dissertation habe ich die hier gewonnenen Erfahrungen in ein nicht geometrisches Umfeld, der Visualisierung symmetrischer Tensorfelder, übertragen. Tensorfelder spielen in der Physik und den Ingenieurwissenschaften eine Rolle. Ihre hohe Dimensionalität macht sie sehr komplex. Meine Interpretation symmetrische Tensorfelder als Störung einer flachen Metrik erlaubt hier einen ganz neuen Zugang. Die resultierende Metrik stelle ich durch eine Einbettung dar. Da die für mich interessanten Metriken im Allgemeinen Ergebnisse numerischer Simulationen oder Messungen sind, ist eine diskrete Metrik der Ausgangspunkt für die Einbettung. Es steht nicht eine hohe Genauigkeit im Vordergrund, sondern ein einfacher schneller Algorithmus, welcher eine Fläche liefert, die die Metrik repräsentiert. Mit der Aufgabe der Berechnung einer Einbettung sind eine Vielzahl von Fragestellungen verbunden. Dazu gehört die Definition einer diskreten Metrik, sowie die Wahl einer geeigneten Interpolation der diskreten Tensor Daten. Jedes dieser Probleme ist für sich eine komplexe Aufgabe, auf die ich hier jedoch nicht alle eingehen werde.

## 2 Flächenkurven

In diesem Abschnitt beschreibe ich die Algorithmen zur Berechnung von Geodäten und Krümmungslinien. Beide Kurvenklassen können durch Differentialgleichungen beschrieben werden, die im Allgemeinen die Basis für deren Berechnung bilden. Diese Verfahren liefern relativ brauchbare Ergebnisse, sind allerdings nicht auf diskrete Flächen übertragbar. Sie erlauben keine natürliche Fehlerkontrolle. Als Anwendung betrachte ich drei Klassen von Netzen auf Flächen, die einen Einblick in ihre lokale Geometrie im Parameterraum erlauben, ohne die Fläche selbst darzustellen. Die erste sind so genannte pseudorthogonale Netze, welche um einen ausgewählten Punkt ein lokales Netz aufbauen. Die zweite Klasse sind geometrische Polarkoordinaten, die jedem von der Beschreibung der Erde bekannt sind, und eine lokale Parametrisierung der Fläche liefern. Die letzte Klasse sind Krümmungsliniennetze, die gut geeignet sind den dreidimensionalen Eindruck von Flächen zu verstärken. Sie werden häufig zur Ausrichtung von Texturen verwendet. Im Gegensatz zu Geodäten sind Krümmungslinien stabil unter lokalen Änderungen und somit auch für globale Netze geeignet. Mehr Details können in [H00] und [HH03] oder [H03] gefunden werden.

## 2.1 Geodäten

Geodäten spielen als kürzeste Verbindungen oder geradeste Kurven auf gekrümmten Flächen eine bedeutende Rolle, sowohl in der Geometrie als auch in der Physik. In der klassischen Mechanik können Geodäten als unbeschleunigte Bewegungen interpretiert werden. In der allgemeinen Relativitätstheorie entsprechen sie möglichen Weltlinien von Testpartikeln. Mathematisch sind sie durch zwei nicht lineare gewöhnliche Differentialgleichungen für die Flächenkoordinaten gegeben, welche mit Numerischen Methoden gelöst werden können. Meine Alternative beruht auf der fundamentalen geometrischen Eigenschaften von Geodäten geradeste Kurven zu sein. Mathematisch bedeutet dies, dass die kovariante Ableitung des Tangentenfeldes in Richtung der Geodäte überall Null ist. Praktisch bedeutet dies, dass die Flächennormale in jedem Punkt der Kurve mit der Kurvennormale übereinstimmt. Diese Eigenschaft erlaubt es die Geodäte lokal durch einen Normalschnitt zu bestimmen. Auf diese Weise reduziert sich die Berechnung der Geodäte auf die sukzessive Projektion von Tangentenabschnitten auf die Fläche. Der wesentliche Punkt ist, die Länge der Tangentenstücke so zu wählen dass der Fehler klein und kontrollierbar bleibt.

### Der Algorithmus

Gegeben ist eine parametrisierte Fläche.

1. Ein Startpunkt  $P$  und Startrichtung wird gewählt
2. Eine richtungsabhängige maximale Schrittweite wird bestimmt.
3. Bis eine Abbruchbedingungen erfüllt ist, wird der nächste Punkt durch Projektion (orthogonal zur Tangentialebene) der Tangente auf die Fläche berechnet. Verwenden wir eine Winkelvariable entspricht die Projektion einer iterativen Nullstellensuche in einer Dimension. Gleichzeitig wird die Schrittweite an die Geometrie (d.h. Krümmung und Änderung der Krümmung) der Fläche angepasst. Diese Größen werden durch drei Winkel repräsentiert, deren Berechnung einem einfachen Skalarprodukt entspricht.

Die Idee ist in Abbildung 1 dargestellt. In Abhängigkeit der speziellen Aufgabe sind un-

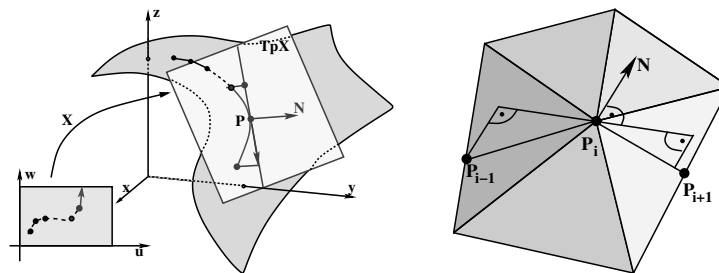


Abbildung 1: Berechnung der Geodäten durch Tangentenprojektion. Links: auf einer parametrisierten Fläche, rechts: auf einer diskreten Fläche

terschiedliche Abbruchbedingungen möglich: die Geodate erreicht den Rand des Definiti-

onsgebietes (immer aktiv); sie erreicht eine bestimmte Länge; die Anzahl der Berechneten Punkte übersteigt eine Maximale Zahl; die Geodäte schneidet sich selbst oder eine andre Geodäte.

Im Allgemeinen ist meine Algorithmus Standardverfahren mit gleicher Fehlerordnung überlegen. Die Kosten meines Algorithmus werden von der Zahl der Iteration zur Berechnung der Projektion bestimmt. Die Anzahl hängt von der lokalen Geometrie der Fläche ab und reduziert sich in einfachen Gebieten stark. Das bedeutet dass sich in flachen Gebieten der Aufwand nicht nur durch die größere Schrittweite stark reduziert.

### Geodäten auf diskreten Flächen

Für die Definition der Geodäten benötigt man die zweifache Differenzierbarkeit der Fläche. Da der Projektionsalgorithmus neben der Berechnung der Flächennormale keine weiteren Ableitungen der Fläche benötigt, kann er einfach auf diskrete Flächen verallgemeinert werden. Durch die einfache Projektion von Geraden auf Flächen vereinfacht sich der Algorithmus wesentlich, siehe Abbildung 1. Diese Verallgemeinerung liefert eine neue Geodätendefinition für diskrete Flächen.

## 2.2 Krümmungslinien

Die zweite Klasse von Flächenkurven die ich betrachte sind Krümmungslinien, Kurven die der maximalen bzw. minimalen Normalkrümmung der Fläche folgen. Da die Krümmung eine wesentliche Flächeneigenschaft ist, sind sie wichtig für die Analyse von Flächen. Sie sind durch eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Parametrisierungskordinaten gegeben. In meinen Algorithmus verwende ich die Eigenschaft, dass die Tangenten an die Kurve überall parallel zur Änderung der Flächennormale ist. Diese Eigenschaft kann durch ein Determinantenkriterium ausgedrückt werden. Verwendet man eine Winkelvariable um die Richtung zu einen neuen Punkt zu bestimmen, reduziert sich die Berechnung eines neuen Punktes auf eine Nullstellensuche in einer Dimension. In Effizienz und Genauigkeit ist dieser Algorithmus mit Runge-Kutta vierter Ordnung mit Schrittweitenanpassung vergleichbar. Auch dieser Algorithmus ist auf diskrete Flächen anwendbar, seine Stärke liegt jedoch im wesentlichen in der geometrischen Bedeutung der Determinante, die sich auch zur Klassifikation von Nabelpunkten auf der Fläche eignet.

## 2.3 Kurvennetze zur Flächenanalyse

Da Geodäten sehr sensibel auf lokale Variationen der Fläche reagieren sind sie nicht immer für globale Netze geeignet. In lokalen Netzen erlauben sie allerdings eine intuitive Visualisierung der Fläche im Parameterraum. Beispiel sind in Abbildung 2 zu sehen. Netz aus Krümmungslinien sind gut geeignet den dreidimensionalen Eindruck von Flächen zu verstärken. Sie sind stabil unter lokalen Änderungen und stellen somit auch globale Eigenschaften der Fläche dar. Eine hervorgehobene Rolle spielen dabei die so genann-

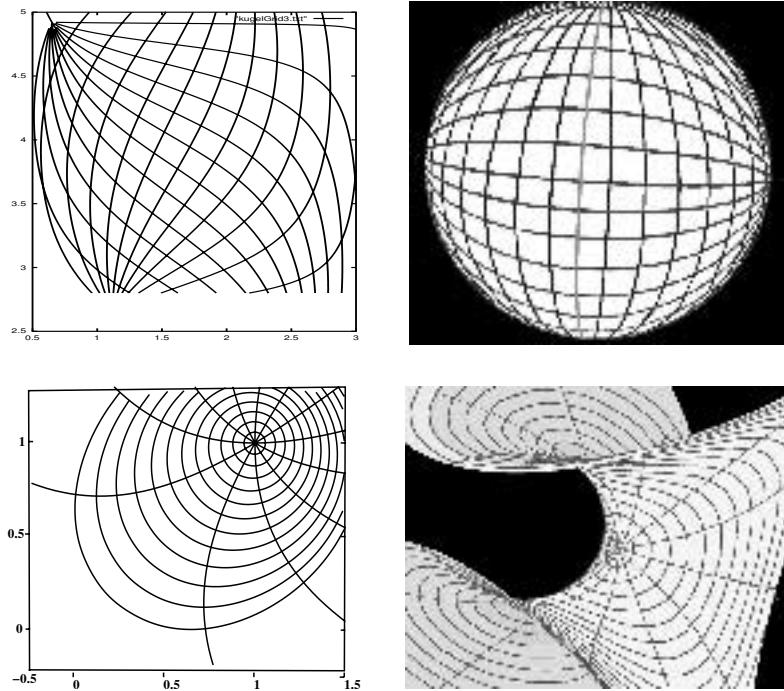


Abbildung 2: Oben: Pseudoorthogonale Geodätenetze auf der Kugel links: im Parameterraum, rechts: auf der Fläche. Unten: Geodätische Polarkoordinaten auf der Enneper Minimalfläche, links im Parameterraum, rechts: auf der Fläche. Die radialen Kurven sind Geodäten ausgehend von einem ausgewählten Startpunkt, die Kreise stellen Punkte mit festen Abstand, die so genannten geodätischen Kreise dar.

ten Nabelpunkte, in denen keine eindeutigen Hauptkrümmungsrichtungen definiert sind. Sie stellen die singulären Punkte des Netzes dar und bestimmen seine Topologie. Die Umgebung der Nabelpunkte kann in Gebiete charakteristischen Verhaltens unterteilt werden, welche durch radiale Krümmungslinien voneinander getrennt werden. Diese radialen Krümmungslinien lassen sich einfach mit Hilfe des Determinantenkriterium finden. Beispiel für Krümmungsliniennetze und Nabelpunktanalysen sind in Abbildung 3 gegeben.

### 3 Tensorfeldvisualisierung

Der zweite Teil meiner Arbeit beschäftigt sich mit Tensorfeldvisualisierung. Tensoren spielen in vielen verschiedenen Gebieten eine wichtige Rolle. In der Geomechanik oder Festkörperphysik drücken sie z. B. die Reaktion von Material auf einwirkende Kräfte aus, in der Geometrie beschreiben der Krümmungstensor sowie der Metrische Tensor die fun-

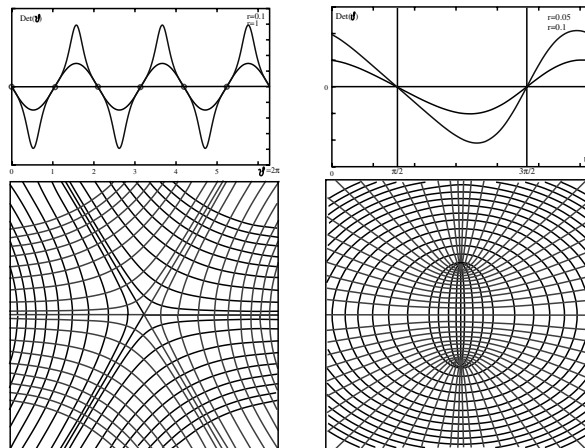


Abbildung 3: Zwei Beispiele für die Determinantenfunktion in der Umgebung von Nabelpunkten. Die Nullstellen entsprechen genau den Radialen Krümmungslinien durch diese Punkte. Links: Afensattel, rechte: elliptisches Paraboloid dargestellt im Parameterraum.

damentalen Eigenschaften der Flächen. Der Gradiententensor von Geschwindigkeitsfeldern erlaubt eine Charakterisierung der Feldstruktur.

Tensorfelder sind Größen die das Konzept von Skalaren und Vektoren verallgemeinern. Sie sind eine mathematische Idealisierung einer geometrischen oder physikalischen Größe, die eine linearisierte Relation zwischen mehrdimensionalen Variablen ausdrückt. Ich beschränke mich hier auf symmetrische Tensoren zweiter Ordnung, die bezüglich einer gegebenen Basis durch symmetrische Matrizen dargestellt werden können. Tensoren sind durch ihre Eigenwerte  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  und die entsprechenden Eigenvektoren  $w_1$ ,  $w_2$  und  $w_3$  charakterisiert. Für symmetrische Tensoren sind die Eigenwerte immer reell und die Eigenvektoren wechselseitig orthogonal. Wegen ihre hohe Dimensionalität sind sie sehr komplex und schwer zu verstehen. Von daher gibt es einen grossen Bedarf an Visualisierungsmethoden, die ein einfaches intuitives Verständnis dieser Daten erlauben.

Im Gegensatz zur Visualisierung von Skalar und Vektorfeldern steht die Tensorfeldvisualisierung noch an ihren Anfängen. Es existieren einige gute Visualisierungstechniken, die allerdings nur einen kleinen Teil der Anwendungen abdecken [DH93, BP98, HPW94, HLL97]. Viele der Visualisierungsmethoden sind Verallgemeinerungen von Vektorfeldmethoden ohne eine physikalische Interpretation zu liefern. Diese Methoden konzentrieren sich oft auf die Darstellung der Eigenrichtungen und vernachlässigen die Bedeutung der Eigenwerte. Insbesondere für Tensorfelder, die in Materialwissenschaften interessant sind, wie Spannungstensoren gibt es kaum Methoden, die tatsächliche Anwendung finden.

### Idee

Um den Ansatz zu motivieren mochte ich einen genaueren Blick auf eine Klasse von Tensoren werfen, die mit Spannungstensoren verwandt sind. Dazu betrachten wir eine Einheitsprobe, die man dem Feld aussetzt. Reduziert man die Betrachtungen auf die Eigenrichtungen ergibt sich folgendes Bild: Positive Eigenwerte bedeuten eine Ausdehnung, negative Eigenwerte eine Kontraktion der Probe. Eigenwerte gleich Null bedeuten keine Veränderungen. Mathematisch kann diese Eigenschaft durch folgende Gleichung ausgedrückt werden.

$$\frac{d}{dt}(ds^2) = \sum_{i,k=1}^3 T_{ik} dx_i dx_k = \sum_{j=1}^3 \lambda_j du_j^2. \quad (1)$$

Dabei ist  $ds = (dx_1, dx_2, dx_3)$  und  $ds^2$  der quadratische Abstand der benachbarten Punkte.  $\lambda_j, j = 1, 2, 3$  sind die entsprechenden Eigenwerte von  $T$ , und  $du_j$  die Komponenten von  $dx$  in der Eigenvektor Basis  $\{w_j, j = 1, 2, 3\}$ . Diese Gleichung erinnert stark an die Definition einer zeitlich veränderlichen Metrik. Diese Beobachtung verwende ich nun dazu eine Metrik  $g$  auf Basis des ursprünglichen Tensorfeldes zu definieren:

$$ds^2(t) = \sum_{ik} \underbrace{(a\delta_{ik} + T_{ik} \cdot t)}_{=: g_{ik}} dx_i dx_k \quad (2)$$

Dabei ist  $\delta_{ik}$  das Kroneckersymbol. Die Konstante  $a$  spielt die Rolle einer Einheitslänge. Die Zeitvariable  $t$  kann als Skalierungsfaktor verwendet werden. Für die tatsächliche Transformation des Tensorfeldes in eine Metrik erlaube ich schließlich eine flexiblere Abbildung. Für mehr Details siehe [H01] und [H03].

## 4 Isometrische Einbettung

Damit haben wir das Problem der Visualisierung des Tensorfeldes auf das der Visualisierung einer abstrakten Metrik verschoben. Im allgemeinen ist ein intuitives Verständnis abstrakter Metrik  $g$  selbst auch nicht einfache. Für den zweidimensionalen Fall oder für zweidimensionale Schnitte höher dimensionaler Räume, kann diese Problem gelöst werden indem man die Metrik in einen höher dimensional Euklidischen Raum einbettet. Das Ergebnis ist eine zweidimensionale Fläche, eingebettet in den dreidimensionalen Raum, mit der selben inneren Geometrie. Diese Einbettung ist gegeben durch eine System partieller nicht lineare Differential Gleichungen für die Flächen Parametrisierung. Um die Einbettung zu Berechnung gibt es zwei fundamental unterschiedliche Ansätze. Der erste ist die Lösung dieser Differentialgleichungen um die Parametrisierungsfunktionen zu bekommen. Der zweite die direkte Bestimmung dreidimensionaler Punkte auf der Fläche als Gitter.

Da der Charakter der Partiellen Differentialgleichungen (elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch) von der Gaußkrümmung der Fläche abhängt, gibt es keine befriedigenden

Standardverfahren zur Berechnung dieser Flächen mit beliebiger Gaußkrümmung. Andere Lösungsversuche gibt es bisher aus dem Kontext der allgemeinen Relativitätstheorie, mit dem Ziel der Darstellung von Lösungen der Einsteinschen Gleichungen für schwarzer Löcher. Diese Ansätze beruhen auf besonderen Eigenschaften wie Kugelsymmetrie und sind für meine Aufgabenstellung ungeeignet [NH96, BAS01].

Ich habe einen alternativen Algorithmus entwickelt der in zwei Teile geteilt werden kann; die Abschätzung der Abstände benachbarter Punkte und der Rekonstruktion der Fläche aus diesen Abständen.

Da wir es im Allgemeinen nicht mit analytischen Werten für die Metrik zu tun haben, betrachte ich ein verallgemeinerte Einbettungsdefinition. Ausgehend von einer Metrik, gegeben in diskreten Punkten eines zweidimensionalen Parameterraums, suchen wir eine Fläche mit folgenden Eigenschaften:

- Die Gaußkrümmung in den Flächenpunkte stimmt mit der theoretische Gaußkrümmung überein.
- Die Abstände benachbarter Punkte entsprechen, im Rahmen einer gewissen Fehlertoleranz, den Abständen gegeben durch die Metrik. Die Fehlertoleranz entspricht der Unsicherheit in der Abstandsabschätzung.

### Einbettungsalgorithmus

Die Fläche wird ringweise um einen ausgewählten Punkt herum aufgebaut. Das grundlegende Prinzip zur Berechnung eines neuen Rings (Sechseck) ist folgendermaßen:

- Eine erste Abschätzung der Flächenkrümmung in dem neuen Punkte wird bestimmt.
- Relevante Abstände werden auf Basis dieser Krümmungsabschätzung berechnet.
- Die Fehlertoleranz als Ausdruck der Unsicherheit der Abstandsrechnung wird bestimmt.
- Eine erste Approximation für den neuen Punkt wird berechnet.
- Die Krümmungsabschätzung wird verbessert.
- Abstände und Fehlertoleranz werden neu berechnet.
- Endgültige Berechnung der neuen Punkte.

In diesem Kurzen Überblick über den Algorithmus sind viele nicht triviale Schritte eingeschlossen, wie die Krümmungsabschätzung, diskrete Krümmungsdefinition, Abstandsberechnung, finden einer geeigneten Triangulierung, Berechnung optimaler neuer Punkte auf Basis dreier Abstände usw. auf die ich hier nicht genauer eingehen möchte. Für mehr Details verweise ich auf [H02, H03, HH03]

### Ergebnisse

Zur Evaluierung habe ich meinen Algorithmus zunächst zur Rekonstruktion bekannter Flächen auf Basis ungestörter Abstände verwendet. Für diese Flächen ermöglicht der Algorithmus eine exakte Rekonstruktion. Für Flächen aller Krümmungen habe ich sehr zufriedenstellende Ergebnisse erhalten. Anschließend habe ich eine statistische Störung auf



die Abstände gelegt um den Einfluss von Fehlern auf das Ergebnis zu untersuchen. Ich demonstriere diesen Effekt am Beispiel eines Paraboloids. Da es schwer ist die Unterschiede in ähnlichen Flächen zu sehen, ist hier eine Projektion in die  $xy$ -Ebene abgebildet. Für den Ungestörten Fall erhalten wir eine exakte Sechseckstruktur, siehe Abbildung 4. Man

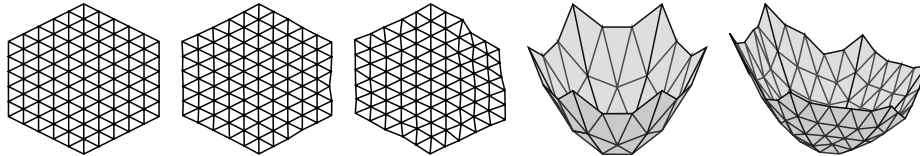


Abbildung 4: Rekonstruktion eines Paraboloid mit aufsteigendem Fehler von links nach rechts, zunächst als Projektion dann die eingebettete Fläche.

kann beobachten, dass sich für kleine Fehler nicht viel ändert. Ab eines gewissen Schwellwertes ändert sich die Fläche plötzlich stark und das Ergebnis ist nichtmehr glatt. Dies ist eine Folge davon, dass ein Punkt durch drei Abstände nicht eindeutig bestimmt ist. Um diese Mehrdeutigkeit zu verhindern werden Kontrollabstände zu weiter entfernten Punkten berechnet. Sind diese Kontrollabstände zu stark gestört wird eine falsche Lösung für die Punkte verwendet.

Zusammenfassend kann man sagen, dass dieser konstruktiver Algorithmus eine schnelle Berechnung der Einbettung einer abstrakten Metrik mit beliebiger Gaußkrümmung ermöglicht. Der Algorithmus löst das Problem der Mehrdeutigkeit anderer Methoden die aus der Berechnung der Abständen der Flächenpunkten basieren. Er ist in der Lage zu erkennen wenn die Einbettung nicht mehr existiert und stoppt dann automatisch. Es ist allerdings nicht möglich eine Fläche mit vorgegebener Topologie zu finden. Als größtes Problem hat sich die Empfindlichkeit der globalen Existenz der Einbettung auf kleine Veränderungen der Metrik herausgestellt. Häufig werden viele Teilflächen benötigt um den ganzen Definitionsbereich zu überdecken. Diese Teilflächen können nicht ohne Risse verbunden werden. Daher muss eine Gleichgewicht zwischen erlaubtem Fehler und der minimalen Zahl von Teilflächen gefunden werden.

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Insgesamt hat sich die Verwendung geometrischer Algorithmen als sehr brauchbar erwiesen. Alle drei Algorithmen, sowohl für die Flächenkurven sowie die Tensorfelder, sind effizient und genau. Da die Algorithmen stark problemorientiert sind ist es besser möglich auf die lokalen geometrischen Gegebenheiten zu reagieren. Die Anwendung dieser Algorithmen auf diskrete Flächen führt zu neuen Verallgemeinerungen differentialgeometrischer Konzepte für diskrete Flächen. Die Verwendung des Algorithmus für Krümmungslinien auf diskreten Flächen ist immer noch Gegenstand meiner Forschung und verspricht eine neue interessante Krümmungsdefinition. Ein Nachteil bei der Flächenkurvenberechnung

ist allerdings der deutlich höhere Implementierungsaufwand, für analytische Flächen.

Der Ansatz eine bestimmte Klasse von Tensorfeldern als Metrik zu interpretieren, eröffnet einen ganz neuen Zugang zur Visualisierung von Tensorfeldern, der die physikalische Bedeutung von Kontraktion und Dehnung eines Probekörpers hervorhebt. Die Darstellung der resultierenden Metrik durch eine Einbettung ist nur eine von mehreren Möglichkeiten der Visualisierung. Anstatt wie bei der Einbettung den selbst Raum zu deformieren führt die Deformation einer Textur zu einer flexibleren Darstellung [H04]. Dieser Ansatz haben nicht mehr das Problem auf lokale Umgebungen beschränkt zu sein und lässt sich einfach auf drei Dimensionen erweitern. Insbesondere im Kontext von Geomechanik erweisen sich diese Ansätze als sehr interessant und brauchbar.

## Literatur

- [BP98] Ed Boring, Alex Pang, *Interactive Deformations from Tensor Fields* IEEE Visualization, 1998
- [BAS01] M.Bondarescu, M.Alcubierre, E.Seidel *Isometric embeddings of black hole horizons in three-dimensional flat space* arXiv:gr-qc/0109093, 2001
- [DH93] Thierry Delmarcelle, Lambertus Hesselink. *Visualizing Second-Order Tensor Fields with Hyperstreamlines*. IEEE Computer Graphics & Applications, 1993.
- [HLL97] Lambertus Hesselink, Yuval Levy, Yingmei Lavin *The Topology of Symmetric Second-Order 3D Tensor Fields* IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, vol. 3
- [HPW94] Lambertus Hesselink, Frits Post, Jarke J. von Wijk *Research Issues in Vector and Tensor Field Visualization* IEEE Computer Graphics and Applications, March 1994
- [H00] Ingrid Hotz, Hans Hagen. *Visualizing geodesics*. IEEE Visualization Conference, Salt Lake City, Utah, 2000.
- [H01] Ingrid Hotz. *Visualizing second order symmetric tensor fields by metric surfaces*. IEEE Visualization Conference, Work in Progress San Diego, CA, 2001.
- [H02] Ingrid Hotz. *Isometric embedding by surface reconstruction from distances*. IEEE Visualization Conference Boston, MA, 2002.
- [H03] Ingrid Hotz. *Geometrische Algorithmen zur Visualisierung diskreter und kontinuierlicher Tensorfelder*. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 2003.
- [HH03] Ingrid Hotz, Hans Hagen. *Isometric embedding for a discrete metric*. in the Book "Geometric Modeling for Scientific Visualization" Co-editors: Guido Brunnett, Bernd Hamann, Heinrich Müller, 2003.
- [H04] Ingrid Hotz, Louis Feng, Hans Hagen, Bernd Hamann, Boris Jeremic, and Kenneth Joy. *Physically Based Methods for Tensor Field Visualization* IEEE Visualization Conference, Austin, Texas, 2004
- [NH96] H.-P. Nollert, H. Herold *Relativity and Scientific Computing* edited by F.W.Hehl, R.A.Puntigam, H.Ruder Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1996, p.330