Anhören von Abständen und Hören von Formen: Inverse Probleme in Raumakustik und darüber hinaus[1]

Ivan Dokmanić[2]

Abstract: Echos und Mehrwegausbreitungen werden herkömmlich als lästiges Übel wahrgenommen; mit dieser Doktorarbeit zeigen wir auf, dass sie auch zu nützlichen, interessanten und manchmal überraschenden Ergebnissen führen können. Wenn wir zu den Echos die richtigen Einstellungen haben, durch das Prisma der Punktmengen und der Geometrie euklidischer Abstände, so offenbaren sie uns wesentliche geometrische Angaben über das Quellen–Kanal–Empfänger System. Diese Perspektive erlaubt uns, aus Echos die Form von Objekten oder Räumen zu rekonstruieren, eine beliebige Anzahl von Mikrofonen in einem unbekannten Raum mit einem Fingerschnippen zu lokalisieren oder die Sprachqualität beim Zuhören einer Quelle, die sich hinter einer Störquelle befindet, zu verbessern. Echos können auch implizit durch die Wellengleichung genutzt werden. Des Weiteren zeigen wir, wie man Echos von der Perspektive der Wellengleichung zur Gestaltung der Infrastruktur mit sehr niedrigen Anforderungen und mit Hilfe von "compressed sensing" und der Abtasttheorie "finite rate of innovation" auf einer Kugeloberfläche anwenden kann. Schließlich analysieren wir eine neue Klasse von allgemeinen Pseudoinversen auf Basis der Normminimierung für die Auflösung inverser Probleme und stellen diese vor.

1 Einleitung

Wie hört man eine räumliche Form? Eine Fledermaus kennt die Antwort: Sie hört auf Echos, um etwas über ihre Umgebung zu erfahren. Die Menschen sind von dieser Fähigkeit der Fledermaus fasziniert—man denke nur an Ikonen der Popkultur wie Daredevil oder Batman. Im Hollywood-Blockbuster Batman: The Dark Knight (2008) benutzen Batman und seine Helfer die Handys ahnungsloser Menschen, um die Räume am anderen Ende der Leitung zu sehen.

Das ist weit hergeholt, aber auch wieder nicht so weit. Eine der zentralen Fragen, denen sich diese Arbeit widmet, lautet: "Ist es möglich, die Form eines Raums zu hören?" Es wird gezeigt, dass die Handlung von The Dark Knight die Grenze zwischen Fiktion und Realität vielleicht überschritten hat. Der Trick besteht darin, Abstände zu hören.

Wie hört man also einen Abstand? Vielleicht so: Als ich noch ein Kind war, brachte mein Vater mir bei, wie man die Sekunden zwischen Blitz und Donner zählt und daraus ermittelt, wie weit das Gewitter entfernt ist. Oder so: Wer schon einmal auf das Echo seiner Fußtritte von einer Wand in der Nähe gehört hat, muss bemerkt haben, dass sich Fußtritt und Echo desto mehr annähern, je näher man der Wand kommt.

[1] Englischer Titel der Dissertation: "Listening to Distances and Hearing Shapes: Inverse Problems in Room Acoustics and Beyond" [Do15]

[2] School of Computer and Communication Sciences, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, ivan.dokmanic@epfl.ch

In beiden Fällen wandeln wir Zeit in Abstand um. Das ist möglich, weil wir die Schallgeschwindigkeit kennen. Also sollte es auch möglich sein, unsere Ohren und Berechnungen auf einem Notizzettel durch Mikrofone und einen Computer zu ersetzen, auf dem ausgeklügelte Algorithmen arbeiten. Dann ließen sich viel kompliziertere Fragen beantworten als nur, wie weit entfernt ein Blitz eingeschlagen ist. Man könnte zum Beispiel aus Echos die Form von Objekten oder Räumen rekonstruieren—ganz ähnlich wie in The Dark Knight—oder einen Flugroboter nur mithilfe von Schall steuern.

Wir hören Abstände, indem wir den Echos zuhören, und können Schlüsse über die Geometrie unserer Umgebung ziehen (genau wie Fledermäuse!). Das Gute daran: Es gibt genug Echos dafür. Wir verbringen viel Zeit in Räumen, und Räume dienen vielen Zwecken, ein "Zweck" allerdings wird häufig übersehen: Ein gut gestalteter Raum erleichtert die Konversation. Das liegt daran, dass es in Räumen Echos gibt, und dass unser Gehirn die frühen Echos mit dem direkten Schall kombinieren und dadurch den effektiven Rauschabstand verbessern kann. (In dieser Arbeit zeigen wir sogar, dass Computer im Wesentlichen dasselbe tun können). Im Rahmen dieser Arbeit wollen wir uns von Menschen, Fledermäusen und dem Dunklen Ritter inspirieren lassen und das Potential von Echos nutzen, um interessante Probleme zu lösen.

2 Inverse Probleme in der Raumakustik und darüber hinaus

Um welche Probleme es dabei geht, steht im Untertitel der Arbeit. Gleich drei Begriffe daraus bedürfen einer Erklärung: inverse Probleme, Raumakustik und darüber hinaus.

2.1 Inverse Probleme

Inverse Probleme könnte man auch einfach Probleme nennen. Das qualifizierende Wort "invers" weist darauf hin, dass es ein zugehöriges Problem gibt, das möglicherweise besser bekannt und besser untersucht ist und dem das Problem, das uns interessiert, in gewisser Weise entgegengesetzt ist. Dieses andere Problem heißt dann das direkte Problem (oder Vorwärtsproblem). Manchmal ist es egal, welches Problem man als das direkte und welches als das inverse bezeichnet. Oft rühren Messergebnisse vom direkten Problem her, und wir versuchen, das Problem zu invertieren, um etwas über den Mechanismus zu erfahren, der die Messergebnisse produziert hat.

Hier eine gute Daumenregel für die Einordnung eines Problems als direktes oder inverses Problem: Die direkte Richtung stammt in der Regel von einem physikalischen Prozess (oder allgemeiner: von der Natur). Der Urknall hat eine Spur hinterlassen, die wir als Fluktuationen in der Hintergrundstrahlung des Universums beobachten können. Der Weg vom Urknall bis zu diesen Fluktuationen wurde von der Natur erledigt. Das direkte Problem zu lösen würde also bedeuten, Rechenmaschinen zu erdenken, die die Messwerte jedes interessierenden Parameters simulieren können, wenn die Bedingungen des Urknalls bekannt sind (das ist konzeptuell einfach, derzeit allerdings praktisch unmöglich). Das inverse Problem könnte darin bestehen, aus der Messung der noch vorhandenen Fluktuationen in der

Hintergrundstrahlung auf die Parameter des Universums unmittelbar nach dem Urknall zu schließen [Ad14].

Eine bessere Vorstellung davon, was mit inversen Problemen gemeint ist, vermittelt die folgende Gegenüberstellung von direkten und zugehörigen inversen Problemen:

(i) Man berechne die Flugbahn eines Projektils anhand seiner Anfangsgeschwindigkeit und der Gravitationsbeschleunigung g der Erde. / Man berechne anhand der Position des Projektils zu k unterschiedlichen (aber bekannten) Zeitpunkten den Wert von g (um es etwas schwieriger zu machen, ersetze man *bekannt* durch *unbekannt*).

(ii) Man berechne anhand der Raumgeometrie und der Eigenschaften der Wände sowie der Schallquelle das Schallfeld für alle Zeiten an allen Punkten in der Umgebung. / Man berechne anhand der Messwerte des Schalldrucks an drei Punkten den Ort der Schallquelle (mit oder ohne Kenntnis der Randbedingungen).

(iii) Man berechne anhand der Geometrie eines Ultraschallkopf-Arrays, das um eine weibliche Brust gelegt ist, und der Dichteverteilung des Brustgewebes die Wellenformen, die die Ultraschallköpfe aufzeichnen, wenn jeder einen Impuls aussendet. / Man berechne anhand der Geometrie des Arrays und der Wellenformen die Dichteverteilung in der Brust.

(iv) Man berechne anhand der Form eines Trommelfells (einer Membrane) ihre Resonanzfrequenzen. / Man berechne anhand der Resonanzfrequenzen einer Trommel ihre Form.

(v) Man berechne anhand von Daten zur Geometrie eines Gitarre-Verstärker-Systems die Wellenform der Rückkopplung. / Man berechne anhand der Studioaufnahme von "I feel fine" der Beatles den zeitabhängigen Abstand von Lennons Gibson J-160E zum Lautsprecher des Verstärkers.

Wir stellen uns ein inverses Problem in der Regel komplizierter vor als ein direktes Problem, aber dies ist nicht unbedingt so. Zum Beispiel könnte das direkte Problem lauten: Man finde anhand der Koeffizienten eines univariaten Polynoms seine Nullstellen. Dann ist das inverse Problem—nämlich das Polynom anhand seiner Nullstellen zu finden—viel einfacher.

Dieses scheinbar banale Beispiel führt das Konzept der *korrekten Problemstellung* oder *Well-Posedness* vor Augen—eines der zentralen Konzepte bei inversen Problemen. Ohne weitere Angaben ist das Problem, ein Polynom anhand seiner Nullstellen zu finden, nicht korrekt gestellt, weil es keine eindeutige Lösung hat. Es ist einfach, eine Lösung zu finden, aber falls wir ein konkretes Polynom suchen, das die gegebenen Nullstellen hat, können wir nicht hoffen, dass genau dieses Polynom gefunden wird, da jede Umskalierung der Koeffizienten die Nullstellen unverändert lässt.

Das Konzept der korrekten Problemstellung wurde von Hadamard formalisiert [Ha02]. Hadamard bezeichnete jedes Problem als *schlecht gestellt*, das mindestens eine der folgenden Bedingungen nicht erfüllt:

- Existenz einer Lösung,
- Eindeutigkeit der Lösung,
- Stabilität in Bezug auf die Daten.

Hadamard hegte starke Vorbehalte gegen schlecht gestellte Probleme—er dachte, sie hätten keine physikalische Bedeutung. Doch inzwischen hat das Fachgebiet gigantische Fortschritte gemacht. Heutzutage sind in der Tat die meisten (wenn nicht alle) interessanten inversen Probleme schlecht gestellt.

2.2 Raumakustik

Raumakustik ist ein Teilgebiet der Akustik, das sich damit beschäftigt, wie sich Schall in Räumen ausbreitet. An und für sich behandelt die Raumakustik zwei sehr unterschiedliche Fragestellungen. Die erste davon betrifft die Physik: Welche Wellenmechanik gilt für die Schallerzeugung und -ausbreitung in geschlossenen Räumen? Dazu gehört die Untersuchung von spiegelnden und diffusen Reflexionen, von Kantenbeugung, von Streuung an diversen Strukturen und des Einflusses einer Reihe weiterer Parameter.

Die zweite Fragestellung betrifft die Wahrnehmung: Als wie angenehm empfinden wir die Akustik in einem konkreten Raum? Es könnte auch darum gehen, wie förderlich die Akustik eines Raums für bestimmte Zwecke ist: zum Anhören eines klassischen Konzerts, eines Jazzkonzerts, einer Vorlesung oder vielleicht einfach für Small Talk im Café. Dazu muss das beim Studium der ersten Fragestellung erlangte Wissen über die Schallausbreitung in Räumen mit Erkenntnissen aus der Psychoakustik und Ergonomie kombiniert werden.

In dieser Arbeit geht es hauptsächlich um den physikalischen Aspekt der Raumakustik. Die Eigenschaften der Wellenausbreitung sollen benutzt werden, um interessante inverse Probleme zu lösen. Wir beschränken und dabei noch weiter und betrachten ausschließlich frühe Reflexionen. Die verwendeten Modelle sind in der Raumakustik weit verbreitet, haben aber wenig mit Wahrnehmung zu tun (wie meine Kollegen aus der Hi-Fi-Ecke immer wieder anmerken).

2.3 ... und darüber hinaus

Bisher war die Rede von Echos von Schall in Räumen. Doch die von uns benutzte Abstandsgeometrie der Reflexionen ist allen Wellenphänomenen gemein. Insbesondere lassen sich die Ergebnisse auch auf die Mehrwegausbreitung von Funkwellen anwenden.

Der formale geometrische Rahmen, der in dieser Arbeit entwickelt wird, ist überall von Nutzen, wo mit kennzeichenlosen Abstandsmengen operiert wird. Naheliegende Anwendungsfälle finden sich bei der Kalibrierung von Sensornetzwerken. Interessanterweise tritt die gleiche Art von Problemen aber auch in der Kristallografie auf.

Zwei Kapitel dieser Arbeit behandeln inverse Probleme, die über den Rahmen von Echo und Abstand hinausgehen. Das erste entstand beim Nachdenken über die Lokalisierung von Schallquellen mit sphärischen Mikrofonarrays. Dies führte zur Entwicklung einer sphärischen FRI—Abtasttheorie “Finite Rate of Innovation” für das Abtasten dünn besetzter Signale auf einer Kugeloberfläche. Das zweite entstand beim Nachdenken über einen tomografischen Ansatz für Touch-Displays. Dabei haben wir eine *dünn besetzte Pseudoinverse* vorgeschlagen, die mit der begrenzten Rechenleistung und Speicherkapazität von Embedded-Hardware kompatibel ist. Daraus ergab sich eine umfassendere Studie von generalisierten Inversen, die die Norm minimieren.

3 Gliederung der Arbeit und Beiträge zum Erkenntnisgewinn

Kapitel 2: Echos und Distanzen Damit diese Arbeit vollständig ist und für sich selbst stehen kann, werden zunächst die grundlegenden physikalischen Prinzipien behandelt. Der erste Teil von Kapitel 2 erläutert, wie Wellen Echos erzeugen und wie sich diese modellieren lassen. Dies bildet die Grundlage für die Einführung eines zentralen Instruments: des Bildquellenmodells. Es wird zunächst als exaktes Instrument zum Lösen partieller Differenzialgleichungen in einigen konkreten Bereichen eingeführt, sodann als Instrument in der geometrischen Akustik, das mit beliebigen Geometrien zurechtkommt. Der zweite Teil des Kapitels behandelt die Geometrie euklidischer Abstände und beschäftigt sich hauptsächlich mit einem immer wieder nützlichen Instrument: den euklidischen Abstandsmatrizen. In den weiteren Kapiteln dienen das Bildquellenmodell und die Geometrie euklidischer Abstände in Kombination als leistungsstarkes Mittel zur Gewinnung geometrischer Informationen in Räumen. Kapitel 2 dient als Auffrischung oder als Einführung für mit dem Thema nicht vertraute Leser.

Kapitel 3: Kann man die Form eines Raums hören? Im Jahr 1966 fragte Mark Kac [Ka66]: “Kann man die Form einer Trommel hören?” Eigentlich wollte er herausfinden, ob das Problem, die Form einer Trommel aus ihren Resonanzfrequenzen zu berechnen, korrekt gestellt ist.

Der zentrale Teil der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich mit einer übertragung von Kacs Frage auf Räume. Stellen Sie sich vor, Sie stehen mit verbundenen Augen in einem unbekannten Raum. Sie schnippen mit den Fingern und hören auf die Reaktion des Raums. Können Sie seine Form hören? Manche Menschen können das intuitiv, doch können wir Computeralgorithmen entwerfen, die Räume hören? Wenn wir die Frage stellen, ob man die Form eines Raums hören kann, wollen wir wissen, ob es möglich ist, die Form eines Raums anhand der Impulsantworten des Raums zu bestimmenâund nicht anhand seiner Resonanzfrequenzen wie bei Kac. Wir gehen diese Fragestellung aber nicht mit Instrumenten aus der Funktionsanalyse an, sondern argumentieren, dass der Weg über Echos und Bildquellen, gewürzt mit einer starken Prise geometrischer Akustik, der nützlichere und praktikablere ist.

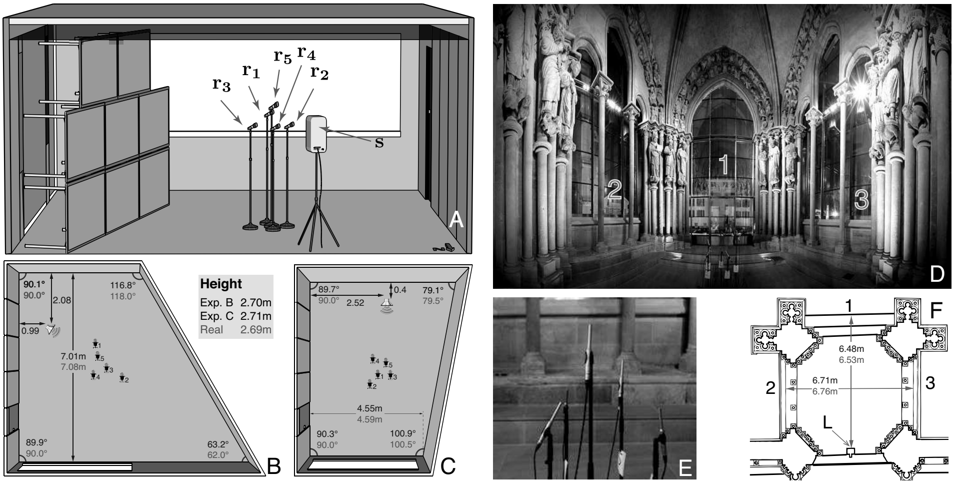

Abb. 1: Raumrekonstruktion in einem Klassenzimmer der EPFL (links) und in der Kathedrale von Lausanne (rechts). Im zweiten Beispiel ist der Raum nicht konvex, doch die Methode ist dennoch robust.

Zunächst stellen wir einen Algorithmus vor, der aus einer einzigen Impulsantwort des Raums, also mittels nur eines Mikrofons, die Geometrie eines konvexen polyedrischen Raums rekonstruieren kann. Wir zeigen, dass die Menge der Echos erster und zweiter Ordnung die Geometrie des Raums eindeutig beschreibt. Unser Algorithmus stützt sich auf starke geometrische Verbindungen zwischen den ersten beiden Generationen von Bildquellen und zwischen den korrespondierenden Echoankunftszeiten. Da wir nur ein einzelnes Mikrofon benutzen, benötigten wir mehr als nur die Echos erster Ordnung. Dass der Raum mit nur einem Mikrofon rekonstruiert werden kann, ist ein überraschendes Ergebnis und ein echtes Analogon zu Kacs Frage in der Zeitdomäne.

Es ist schwierig, Echos höher Ordnung aus Raumimpulsantworten zu erhalten. Deswegen verwendet der zweite vorgeschlagene Algorithmus nur Echos erster Ordnung und ein paar Mikrofone, um die Form eines Raums zu berechnen. Weiterhin zeigen wir, dass diese Echos erster Ordnung bei günstigen Bedingungen konvexe polyedrische Räume eindeutig beschreiben können. Der entscheidende Schritt dabei ist das Sortieren der Echos, bei dem die einzelnen Echos den korrekten Wänden zugeordnet werden. Anders als frühere Methoden rekonstruiert der vorgeschlagene Algorithmus aus einer einzelnen Schallemission mithilfe eines Mikrofon-Arrays beliebiger Geometrie die vollständige dreidimensionale Geometrie des Raums. Solange die Mikrofone die Echos hören können, lassen sie sich frei anordnen. Unsere Ergebnisse beantworten nicht nur eine grundlegende Frage über das inverse Problem der Raumakustik; sie finden auch Anwendungen in der Architekturakustik, bei der Indoor-Lokalisierung, in der virtuellen Realität und in der Audioforensik.

Kapitel 4: Lokalisierung und Kalibrierung Die Lokalisierung von Quellen ist ein klassisches inverses Problem. Viele Verfahren funktionieren im freien Raum hervorragend, haben jedoch Probleme mit Echos in Räumen. Wir schlagen einen formalen Rahmen vor, bei dem der Raum nicht stört, sondern vielmehr *hilft*.

Statt Echos geometrisch zu behandeln, berücksichtigen wir sie zunächst nur implizit: Das Problem der Lokalisierung mehrerer Quellen in einem Raum lösen wir durch Diskretisierung der Helmholtz-Gleichung. Unter der Annahme, dass der Raum bekannt ist, zeigen wir, wie ein konkretes Diskretisierungsschema—das Finite-Elemente-Verfahren (FEM)—zugleich die partielle Differenzialgleichung löst und uns mit einem Verzeichnis zur Ausdünnung versorgt, so dass zur Lokalisierung der Quelle dünn besetzte Wiedergewinnungsmethoden eingesetzt werden können. Die zweite wichtige Zutat ist der sogenannte Breitbandvorteil. Eine einzelne Helmholtz-Gleichung modelliert, was bei einer Frequenz passiert, aber für Breitbandquellen können wir die Helmholtz-Gleichung bei vielen Frequenzen aufstellen. Entscheidend dabei ist, dass das Dünnbesetztheitsmuster im Quellenvektor über die Frequenzen hinweg konstant bleibt. Möglicherweise überraschend ermöglicht uns diese Beobachtung, mit lediglich einem Mikrofon mehrere Quellen mit beliebigen Breitbandspektren zu lokalisieren.

Im Weiteren zeigen wir, wie das in Kapitel 3 vorgestellte Sortieren der Echos dabei hilft, in einem *bekannten* Raum Informationen zu gewinnen. Wir wenden dieses Verfahren auf die Indoor-Lokalisierung mit lediglich einem omnidirektionalen Sensor an (im freien Raum wäre dies unmöglich) und zeigen, wie man Quellen in nichtkonvexen Räumen lokalisiert. Wir gehen davon aus, dass die Quelle einen Impuls emittiert, dessen Ankunftszeit auf Empfängerseite gemessen werden kann.

Operationen mit Mikrofonen erfordern normalerweise die Kenntnis der Positionen der Mikrofone. Anders ausgedrückt: Die Geometrie des Mikrofonarrays muss bekannt sein. Die Idee, Quellen an unbekannten Orten zu benutzen, um die Arraygeometrie zu kalibrieren, ist verlockend. Interessanterweise lassen sich sowohl die Orte der Quellen als auch die Orte der Empfänger rekonstruieren, wenn ihre Anzahl ein vorbestimmtes Minimum überschreitet; dies haben in jüngster Zeit mehrere Arbeiten erkannt. Das Problem ist ein Fall von mehrdimensionalem Entfalten, und wir schlagen vor, es durch EDM-Vervollständigung zu lösen, wodurch wir eine Formulierung erhalten, die anders als frühere Arbeiten einfach mit fehlenden Distanzen und sonstigen vorab nicht bekannten Informationen über das Array zurechtkommt.

Anschließend zeigen wir, dass sich die Anzahl der für die Kalibrierung des Arrays benötigten Quellen in einem Raum deutlich reduzieren lässt, selbst wenn der Raum unbekannt ist. Denn—und das ist die zentrale Beobachtung—die Echos im Raum entsprechen virtuellen Quellen, die wir "gratis" dazubekommen. Dies ermöglicht Vorhaben wie etwa, das Array mit nur einer Quelle zu kalibrieren, zum Beispiel mit einem Fingerschnippen. Mit unserer Technik lässt sich auch die absolute Position des Mikrofonarrays im Raum berechnen. Andere Verfahren lieferten bisher Erkenntnisse darüber nur bis zu einer starren Transformation oder Reflexion. Und außerdem erhalten wir als Nebenprodukt die Geometrie des Raums!

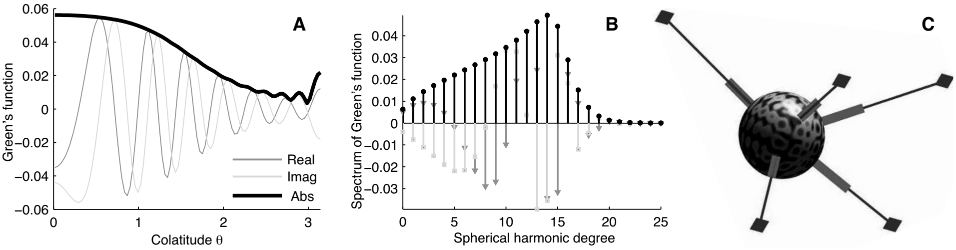

Abb. 2: Quellenidentifizierung für eine sphärische Anordnung von Mikrofonen. In (A) die Green Funktion, in (B) die spektralen Koeffizienten, und in (C) die Lokalisierung.

Kapitel 5: Abtasten dünn besetzter Signale auf einer Kugeloberfläche Bei der Beantwortung von Fragen über die Lokalisierung von Schallquellen mit sphärischen Mikrofonarrays (Abb. 2) entstand eine umfassende Theorie über das Abtasten dünn besetzter Ansammlungen von Spikes auf einer Kugeloberfläche. Diese Theorie wird in Kapitel 5 vorgestellt.

Wir entwickeln ein Abtasttheorem und zugehörige Algorithmen, die eine Ansammlung von Spikes auf einer Kugeloberfläche aus Abtastungen ihrer tiefpassgefilterten Ablesungen perfekt rekonstruieren kann. Entscheidend für den Algorithmus ist eine Verallgemeinerung der Methode der auslöschenden Filter—einem Instrument, das häufig zur Verarbeitung von Arraysignalen und zur FRI-Abtastung eingesetzt wird. Der vorgeschlagene Algorithmus kann K Spikes aus $(K+\sqrt{K})^2$ spährischen Abtastungen rekonstruieren. Dies stellt gegenüber bekannten FRI-Abtastschemata auf der Kugeloberfläche eine Verbesserung um einen Faktor vier bei großen K dar.

Kapitel 6: Ein Rake-Empfänger für die Cocktail-Party In diesem Kapitel geht es darum nachzuahmen, wie Menschen Echos benutzen. Es ist bekannt, dass Echos die Sprachverständlichkeit verbessern [BSP03, LB64]. Tatsächlich ist zusätzliche Energie in Form früher Echos (innerhalb ca. der ersten 50 ms der Raumimpulsantwort) äquivalent zu ebenso viel zusätzlicher Energie im direkten Schall [BSP03]. Diese Beobachtung legt neue Konstruktionsprinzipien für Indoor-Strahlformer nahe, mit unterschiedlichen Optionen für Leistungsmaße und Referenzsignale.

Wir stellen das Konzept eines akustischen Rake-Empfängers vor—eines Mikrofon-Strahlformers, der mit Hilfe von Echos die Schall- und Interferenzunterdrückung verbessert. Die "Rake"-Idee ist auf dem Gebiet der drahtlosen Datenübertragung wohlbekannt: Es geht darum, verschiedene bei den Empfängerantennen eintreffende Mehrwegkomponenten konstruktiv zu kombinieren. Anders als die zur drahtlosen Datenübertragung dienenden Spreizspektrumsignale sind Sprachsignale nicht (nahezu) orthogonal zu ihren Verschiebungen oder zu anderen Sprachsignalen. Daher konzentrieren wir uns auf die räumliche statt auf die zeitliche Struktur. Anstatt den Kanal explizit abzuschätzen, stellen wir Korrespondenzbeziehungen zwischen frühen Echos in der Zeit und Bildquellen im Raum her. Diese mehrfachen Quellen des gewünschten und des störenden Signals bieten zusätzliche räumliche Diversität, die wir bei der Entwicklung des Strahlformers nutzen können. Wir stellen verschiedene "intuitive" und optimale Formulierungen akustischer Rake-Empfänger sowohl in der Frequenzdomäne als auch in der Zeitdomäne vor und zeigen theoretisch und numerisch, dass die Rake-Formulierung des Strahlformers mit maximalem Signal-Interferenz/Rausch-Abstand (Rake-MaxSINR) eine signifikant bessere Rausch- und Interferenzunterdrückung ermöglicht. Neben dem SINR beobachten wir auch Verbesserungen bei der wahrnehmungsorientierten Beurteilung der Sprachqualität—der sogenannten PESQ-Metrik (Perceptual Evaluation of Speech Quality).

Kapitel 7: Alternative generalisierte Inverse Ähnlich wie Kapitel 5 weicht auch das letzte Kapitel dieser Arbeit ein wenig vom zentralen Thema ab. Es entstand aus einer Bemühung heraus, gewisse überbestimmte tomografische Inversionen zu beschleunigen, die für eine neue Touch-Display-Technologie benötigt wurden. Im ersten Ansatz versuchten wir, die Rekonstruktion mit der Moore-Penrose-Pseudoinverse (MPP) der Systemmatrix zu berechnen. Aber die Anforderungen an die Framerate waren so hoch, dass die Verwendung der MPP viel zu viel Rechenzeit kostete. Die Lösung bestand darin, eine alternative generalisierte Inverse mit vielen Nullen zu benutzen—die *dünn besetzte Pseudoinverse*. Es handelt sich dabei um die generalisierte Inverse mit der kleinsten l1-Betragssummennorm. Angeregt von den Implikationen dieses Ergebnisses, studierten wir das Konzept einer die Norm minimierenden alternativen generalisierten Inversen in wesentlich größerer Ausführlichkeit. Kapitel 7 beschreibt diese Studien.

Eine konkrete generalisierte Inverse, die die Norm minimiert, ist die MPP. Sie hat unter allen generalisierten Inversen einer Matrix die geringste Frobenius-Norm. Die MPP ist weit über die Frobenius-Norm hinaus optimal, aber das Freiwerden der Freiheitsgrade im Zusammenhang mit der optimalen Quadratnorm ermöglicht uns, weitere nützliche Eigenschaften zu realisieren. Zunächst generalisieren wir die Ergebnisse von Ziętak [Zi97], indem wir zeigen, dass die MPP neben unitär invarianten Norman auch verschiedene andere Normen minimiert—ein weiterer Nachweis ihrer Robustheit als richtige Wahl für die meisten Situationen.

Anschließend beschäftigen wir uns mit einigen Normen, die von der MPP nicht minimiert werden, deren Minimierung aber für linear inverse Probleme und dünn besetzte Darstellungen relevant ist. Insbesondere betrachten wir die ℓ^1-Betragssummennorm und die induzierten $\ell^p \to \ell^q$-Normen. Zum Beispiel zeigen wir, wie generalisierte Inverse berechnet werden können, die insofern eine "Arme Leute"-Minimierung von ℓ^p erreichen, als sie das Aufblasen der ℓ^p-Norm im durchschnittlichen oder im schlimmsten Fall minimieren. Weiterhin konzentrieren wir uns anstelle von Normen auf Matrizen mit interessantem Verhalten. Wir stellen eine Klasse von Matrizen vor, für welche die MPP Normen minimiert, die sie normalerweise nicht minimiert, sowie eine Klasse, bei der viele die Norm minimierende generalisierte Inverse zusammenfallen, jedoch nicht mit der MPP. Abschließend diskutieren wir die effiziente Berechnung der generalisierten Inversen zu verschiedenen Normen.

Zusammenfassung und Ausblick Unsere Techniken zur Arbeit mit Abständen unter Rahmenbedingungen wie Rauschen, Löschungen und unbekannten Permutationen sind weit über die Raumakustik hinaus von Nutzen. Mögliche Anwendungen liegen in der MIMO-Kommunikation, bei der autonomen Roboternavigation und Kartographie sowie der Tiefenbildgebung, um nur einige zu nennen. Besonders spannend ist vielleicht die Verbindung zur Kristallografie, wo sie möglicherweise verschiedene *Ab-initio*-Rekonstruktionsverfahren erschließen könnten.

Der Breitbandvorteil könnte benutzt werden, um eine neue Generation von Streumikrofonen zu entwickeln, die insbesondere die Quellenlokalisierung und die blinde Quellentrennung verbessern könnten.

Literaturverzeichnis

[Ad14] Ade, P A R *et al.*; BICEP2 Collaboration: Detection of B-Mode Polarization at Degree Angular Scales by BICEP2. Phys. Rev. Lett., 112(24):241101, Juni 2014.

[BSP03] Bradley, J S; Sato, H; Picard, M: On the Importance of Early Reflections for Speech in Rooms. J. Acoust. Soc. Am., 113(6):3233, 2003.

[Do15] Dokmanić, Ivan: Listening to Distances and Hearing Shapes: Inverse Problems in Room Acoustics and Beyond. Dissertation, EPFL, Lausanne, 2015.

[Ha02] Hadamard, J: Sur Les Problémes Aux Dérivées Partielles Et Leur Signification Physique. Princeton University Bulletin, 1902.

[Ka66] Kac, Mark: Can One Hear the Shape of a Drum. Am. Math. Mon., 73:1–23, 1966.

[LB64] Lochner, JPA; Burger, J F: The Influence of Reflections on Auditorium Acoustics. J. Sound Vib., 1(4):426–454, 1964.

[Zi97] Ziętak, K: Strict Spectral Approximation of a Matrix and Some Related Problems. Appl. Math., 24(3):267–280, 1997.

Ivan Dokmanić promovierte 2015 an der ETH Lausanne im Fach Computer- und Kommunikationswissenschaften. Zuvor war er Studienassistent an der Universität Zagreb, Codec Entwickler für MainConcept AG und Designer für digitale Audioeffekte für Little Endian Ltd. Im Sommer 2013 arbeitete er für Microsoft Research, Redmond. Er beschäftigt sich mit inversen Problemen, Audio und Akustik, Signalverarbeitung für Sensornetzwerke und mit grundlegenden Bestandteilen der Signalverarbeitung. Für seine Arbeit über Rekonstruktion von Raumformen durch Echos erhielt er 2011 den Best Student Paper Award von ICASSP. 2014 erhielt er ein Google PhD Stipendium. Seit 2015 arbeitet er als Postdoc mit Laurent Daudet (Institut Langevin), Stéphane Mallat (ENS), und Martin Vetterli (ETH Lausanne). Im Herbst 2016 wird er eine Stelle als Assistenzprofessor an der UIUC antreten. Ivan Dokmanić ist auch Sänger und Gitarrist in der Band Ivan and the Terribles, zusammen mit Martin Vetterli am Bass, Paolo Prandoni an allem, und Marta Martinez-Cámara am Saxophone.